Höhere Näherungen für den Massenoperator in Spinorfeldtheorien mit relativistischer Impulsbegrenzung

Günter Friedel

1971

Höhere Näherungen für den Massenoperator in Spinorfeldtheorien mit relativistischer Impulsbegrenzung

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von
Günter Friedel

München
1971

1. Berichterstatter: Prof. Dr. F.Bopp

2. Berichterstatter: Prof. Dr. H.A.Kastrup

Tag der mündlichen Prüfung: 22.12.1971

DISSERTATIONS – und FOTODRUCK FRANK oHG
8000 München 2 · Gabelsbergerstr. 15 · Tel.: 2 80 90 90

Zusammenfassung.

Die bekannten Regeln zur Berechnung von störungstheoretischen Näherungen mit Hilfe von Feynmangraphen konnten auf die Boppsche Gitterraumtheorie mit lokaler Vierfermionenwechselwirkung übertragen werden. Die fehlende Lorentzinvarianz führt aber zu einigen Schwierigkeiten bei der Anwendung dieser Technik, da man einerseits mit Summen statt mit Integralen zu rechnen hat, und da es andererseits keinen gleichwertigen Ersatz für Kovarianzargumente bei Vektor- und Tensorgrößen gibt.

In dieser Arbeit werden bei der Berechnung von Vakuumerwartungswerten alle Summen über die diskreten Punkte des endlich ausgedehnten reziproken Gitters ersetzt durch raumartig abgeschnittene Integrale. Durch dieses lorentzinvariante Abschneideverfahren wird eine kleinste Länge eingeführt, die vergleichbar ist mit der Gitterkonstanten des Boppschen Modells.

Es wird gezeigt, daß man mit dieser Methode zu Ergebnissen gelangt, die mit den früheren störungstheoretischen Rechnungen im Gitterraum qualitativ übereinstimmen.

Nach Umformung des Wechselwirkungsoperators in die fierzinvariante Form, gelingt die gemeinsame Aufsummation von Leiter- und Kettengraphen samt der Mischungen von beiden. Man gelangt zu einer effektiven Wechselwirkung, die additiv zur ursprünglichen lokalen Wechselwirkung eine nichtlokale Korrektur mit einem skalaren und einem pseudoskalaren Bindungszustand enthält. Diese Korrektur führt bei der Berechnung der Fermionselbstenergie zu einer beträchtlichen Absenkung der Masse in Hartree-Fock-Näherung.

Bei lokalen Vierfermionenwechselwirkungen hat die universelle Kopplungskonstante die Dimension Länge im Quadrat. Es wird gezeigt, daß jeder einzelne zusammenhängende Selbstenergie- und Vakuumpolarisationsgraph endliche Beiträge liefert, wenn man die Kopplungskonstante proportional zum Quadrat der kleinsten Länge wählt, die in der Gitterraumtheorie mit dem Gravitationsradius des Elektrons vergleichbar ist. Es werden Argumente angegeben, die diese Abhängig-

keit der Kopplungskonstanten rechtfertigen.

Führt man den Grenzübergang zu verschwindender kleinster Länge bei konstanter Hartree-Fock-Masse durch, so erhält man in der Selbstenergiematrix des Fermions als Folge der Aufsummation, die in der effektiven Wechselwirkung steckt, logarithmisch divergente Beiträge. Diese führen im Fermionpropagator, den man aus dieser Selbstenergiematrix mit der Dysongleichung gewinnt, zu einem Einteilchenpol, dessen Masse und Residuum verschwinden. Obwohl diese Masse nach dem Grenzübergang mit der des freien Urfermions übereinstimmt, kommt man nicht zurück zum Propagator der freien Theorie. Störungsrechnung auf der Basis der Hartree-Fock-Näherung setzt voraus, daß der Grundzustand die chirale Symmetrie des Hamiltonoperators bricht. Es existieren pseudoskalare Goldstonebosonen unabhängig vom Grenzübergang, weil dabei die Hartree-Fock-Masse endlich und von null verschieden bleibt.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung 1

1. Endliche Selbstenergie mit Störungsrechnung in der Gitterraumtheorie
   1.1 Grundlagen der Störungsrechnung in der Gitterraumtheorie 4
   1.2 Selbstkonsistenzansatz zur Lösung der Dysongleichung 8
   1.3 Einführung einer lorentzinvarianten Abschneidefunktion. 10
   1.4 Berechnung der Hartree-Fock-Näherung 13
   1.5 Kopplungskonstante als Funktion der kleinsten Länge 17
   1.6 Abhängigkeit vom Abschneideparameter bei Graphen n-ter Ordnung 18
   1.7 Unterschiede zur Heisenbergtheorie 21

2. Die effektive Wechselwirkung in Leiter- und Kettennäherung
   2.1 Auswahl einer Teilreihe von Selbstenergiegraphen zur Berechnung der Massenmatrix 25
   2.2 Auflösung der Matrixgleichung für die effektive Wechselwirkung D_{il} 29
   2.3 Berechnung der Vakuumpolarisation Π_{jk} 33
   2.4 Selbstkonsistenzgleichung aus dem Goldstone-Theorem 37
   2.5 Diskussion der effektiven Wechselwirkung für den Fall der Störungsrechnung 39
   2.6 Die Rolle der Quasilokalität bei der Bewältigung von Divergenzen 46

3. Berechnung der Massenkorrektur
   3.1 Gleichungen für die Massenmatrix 50
   3.2 Massenkorrektur 54
   3.3 Diskussion des Ergebnisses 59

Anhang A.1 bis A.4 64

Literaturverzeichnis

Einleitung.

In einem dreidimensionalen einfach kubischen Gitter mit Z^3 Punkten formulierte Bopp [1-4] eine Elementarteilchentheorie, die mathematisch gesehen wohl definiert ist, denn der Hilbertraum hat endliche Dimension. Es wird angenommen, das kubische Gitter habe die Kantenlänge $A = 1\sqrt{Z}$ und die Gitterkonstante $a = 1\sqrt{Z}^{-1}$, die mittlere Proportionale 1 sei etwa von nuklearer Dimension ($1=0{,}2\cdot10^{-13}$cm). Zunächst ist Z eine endliche, aber große Zahl ($Z=10^{83}$), es bleibt aber durchaus offen, ob man in den Ergebnissen, die diese Theorie liefert, den Grenzübergang $Z\to\infty$ ausführen kann, so daß 1 als einzige Länge übrig bleibt.

Zu jedem Gitterpunkt gibt es vier Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für Urfermionen. Bewegung wird in diesem Rahmen formuliert als Vernichtung eines Urfermions an einem Punkt des Gitters und Wiedererzeugung an einem Nachbarpunkt. Die freien Urfermionen haben Masse o.

Unter Beschränkung auf lokale Vierfermionwechselwirkungen gelangt Bopp [3] nach dem Prinzip, möglichst viele Symmetrien des Bewegungsoperators beizubehalten, zu einem Wechselwirkungsoperator vom Heisenbergtyp. Da der gesamte Hamiltonoperator Touschekinvarianz besitzt, muß im Grundzustand diese Symmetrie spontan gebrochen sein, wenn sich für die physikalischen Fermionen als Ergebnis der Selbstwechselwirkung eine von null verschiedene Masse ergeben soll.

Weidemann [5] hat gezeigt, daß bei störungstheoretischen Rechnungen die aus der Feldtheorie bekannten Regeln für Feynmangraphen auf die Gitterraumtheorie übertragen werden können. Durch Aufsummation der Hartree-Fock-Graphen gelangte er zur gleichen Selbstkonsistenzgleichung für die Existenz eines Fermions mit endlicher Masse, wie sie schon früher von Weidemann und Bopp [6], sowie unabhängig davon von Wahl [7] mit Variationsmethoden abgeleitet wurde. Danach kann die Masse nur endlich und von null verschieden sein für eine von Z abhängige Kopplungskonstante W mit $W\sim\sqrt{Z}\cdot1^{-1}$. Analoge Aussagen ergaben sich im Modell von Y.Nambu und G.Jona-Lasinio [8].

Müller [9] behandelte das Bindungsproblem solcher Teilchen-

Antiteilchenpaare mit der Bethe-Salpeter-Gleichung und fand einen skalaren Bindungszustand, dessen Masse wenig kleiner war als die doppelte Fermionmasse, sowie einen pseudoskalaren der Masse null in Übereinstimmung mit dem Goldstone-Theorem. Die Kopplungskonstanten dieser Bindungszustände an das Fermion verhalten sich wie $(\ln Z)^{-1}$, die differentiellen Wirkungsquerschnitte wie $(\ln Z)^{-2}$. Dies sind nur dann wenig befriedigende Ergebnisse, wenn man vor Augen hat, daß der Grenzübergang $Z \to \infty$ möglich und sinnvoll sein sollte, was ja den Grenzübergang zum unendlich ausgedehnten Kubus mit Gitterkonstante null bedeutet.

Wir haben festgestellt, daß sich qualitativ dieselben Ergebnisse einstellen, wenn man die Impulsintegrale in Feynmangraphen mit einer lorentzinvarianten Abschneidefunktion berechnet, die nur charakterisiert wird durch eine kleinste Länge Δ^{-1} von der Größenordnung a. Daher soll versucht werden, auch bei weitergehenden Näherungen die rechnerischen Vorteile eines lorentzinvarianten Formalismus zu nützen. Man kann hoffen, daß die so gewonnenen Ergebnisse auch weiterhin wesentliche Strukturen des Gitterraummodells wiedergeben, allerdings nicht in Bezug auf die Lorentzkovarianz. Wir fragen daher nicht, in welcher Form und in welchem Ausmaß sich das Fehlen der Lorentzinvarianz in der Gitterraumtheorie äußert. Diesen Fragen hat sich Stocker [10] in seiner Dissertation gewidmet.

Wir wollen mit unserer lorentzinvarianten Abschneidemethode den Fermionpropagator aus der Dysongleichung berechnen, indem wir den Massenoperator störungstheoretisch durch Aufsummation einer Teilmenge von eigentlichen Selbstenergiegraphen bestimmen, die mehr umfaßt, als die Graphen, die zur Hartree-Fock-Näherung führen. Wir gelangen dadurch zu einer wesentlichen Korrektur der Hartree-Fock-Masse. Im Laufe der Rechnungen können wir an Hand von Spezialfällen oder Teilresultaten die Übereinstimmung mit den oben zitierten Ergebnissen zeigen, die ja im Gitterraum gewonnen wurden.

Große Bedeutung messen wir der Frage bei, welche Rolle die in Kontinuumstheorien auftretenden Ultravioletttdivergenzen in unserem Modell spielen. Das bedeutet in der Sprache der Git-

terraumtheorie, daß wir den Einfluß der Randbezirke des Impulsraumwürfels bei der Entstehung von bosonartigen Bindungszuständen und für das Zustandekommen der Fermionmasse untersuchen wollen, soweit dabei nicht die spezielle Form der Begrenzung des Impulsraums, sondern die Begrenzung an sich eine Rolle spielt.

Im oben skizzierten Programm bietet sich daneben die Möglichkeit, das Boppsche Vorgehen mit dem von Heisenberg [11] zu vergleichen, das wesentlich durch indefinite Metrik im Hilbertraum geprägt ist.

1. Endliche Selbstenergie mit Störungsrechnung in der Gitterraumtheorie.

1.1 Grundlagen der Störungsrechnung in der Gitterraumtheorie.

Der Hamiltonoperator der Boppschen Theorie hat die Form

$$H = H_B + H_W$$

$$H_B = -i\frac{\sqrt{z}}{2l}\sum_{\underline{n},k}\bar{\psi}(\underline{n})\gamma^k(\psi(\underline{n}+\underline{e}_k)-\psi(\underline{n}-\underline{e}_k))$$

$$H_W = W\sum_{\underline{n}}(\bar{\psi}(\underline{n})\gamma^{\mu 5}\psi(\underline{n}))(\bar{\psi}(\underline{n})\gamma_{\mu 5}\psi(\underline{n})) \qquad (1.1)$$

$\underline{n}=(n_1,n_2,n_3)$ sind die Gittervektoren im Koordinatenraum mit ganzzahligen n_i, modulo Z.

$\underline{e}_i$ sind Einheitsvektoren in die Koordinatenrichtungen.

Wir verwenden die Metrik $g^{00}=+1$; $g^{ii}=-1$ für $i=1,2,3$.

$$\gamma^5=\gamma_5=i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\,,\quad (\gamma^5)^2=+1$$

$$\gamma^{\mu\nu}=\frac{i}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]_-\,,\quad \mu,\nu=0,1,2,3,5 \qquad (1.2)$$

Den Operator (1.1) schreiben wir um ins reziproke Gitter:

$$H_B = \sum_{\underline{h}}\bar{\psi}(\underline{h})\,\underline{\gamma}\cdot\underline{p}\,\psi(\underline{h})$$

$$H_W = \sum_{\underline{h}_1,\dots,\underline{h}_4} W(\bar{\psi}(\underline{h}_1)\gamma^{\mu 5}\psi(\underline{h}_2))(\bar{\psi}(\underline{h}_3)\gamma_{\mu 5}\psi(\underline{h}_4))\,\delta_{\underline{h}_1-\underline{h}_2,\,-\underline{h}_3+\underline{h}_4} \qquad (1.3)$$

$\underline{h}=(h_1,h_2,h_3)$ sind Vektoren des reziproken Gitters mit ganzzahligen h_i, modulo Z.

$\underline{p}$ ist der Quasiimpuls mit den Komponenten

$$p_k = \frac{\sqrt{z}}{l}\sin\left(\frac{2\pi}{z}h_k\right). \qquad (1.4)$$

Der Impulssatz gilt nicht für den Quasiimpuls $\underline{p}$, sondern für den Gittervektor $\underline{h}$.

Man kommt nach Weidemann [5] wieder zurück zum Kontinuum durch die Ersetzungen

$$\psi(\underline{h}) \to (za)^{-3/2}\psi(p)\,,\quad \delta_{\underline{h},\underline{h}'} \to \left(\frac{2\pi}{za}\right)^3\delta^3(p-p')$$

$$W \to ga^{-3}\,,\quad \sum_{\underline{h}} \to \left(\frac{za}{2\pi}\right)^3\int d^3p\,. \qquad (1.5)$$

$$H_W \longrightarrow g \int \frac{d^3p_1 \cdots d^3p_4}{(2\pi)^9} (\bar{\psi}(p_1)\gamma^{\mu 5}\psi(p_2))(\bar{\psi}(p_3)\gamma_{\mu 5}\psi(p_4))\delta^3(p_1-p_2+p_3+p_4)$$

Faßt man in der Gitterraumtheorie die kontinuierlichen Variablen t bzw. p^0 mit $\underline{n}$ bzw. $\underline{p}=\underline{p}(\underline{h})$ aus (1.4) zu Vierergrößen

$$n^\mu = (t, \underline{n}) \quad , \quad p^\mu = (p^0, \underline{p}(\underline{h})) \tag{1.6}$$

zusammen, so kann man den exakten Feynmanpropagator wie üblich als Erwartungswert des zeitgeordneten Produktes der Feldoperatoren im Heisenbergbild bezüglich des physikalischen Vakuums $|0\rangle$ definieren.

$$i S_F'(n-n') = \langle 0|T\psi(n)\bar{\psi}(n')0\rangle \tag{1.7}$$

Die Dysongleichung [12] für S_F' im Impulsraum läßt sich dann formal wie im Kontinuum schreiben:

$$S_F'(p) = S_F^0(p) + S_F^0(p)\Sigma(p)S_F'(p) \quad \text{oder} \quad S_F'(p) = \frac{1}{(S_F^0(p))^{-1} - \Sigma(p)} \tag{1.8}$$

S_F^0 sei der Propagator der masselosen Urfermionen, also

$$(S_F^0(p))^{-1} = p^\mu \gamma_\mu = \not{p} \ .$$

$\Sigma(p)$ ist der Massenoperator, den man im Rahmen der Störungstheorie durch Aufsummation aller eigentlichen Selbstenergiegraphen gewinnt.

Weidemann [5] hat die Regeln für das Aufstellen von Feynmangraphen für die Boppsche Vierfermionenwechselwirkung abgeleitet. Danach kann man die Graphenregeln der Elektrodynamik verwenden mit folgender Abänderung:

$(-ie\gamma^\mu)_{\alpha\beta}(iD_F')_{\mu\nu}(-ie\gamma^\nu)_{\gamma\delta}$ für

ist zu ersetzen durch $-2ig(\gamma^{\mu 5})_{\alpha\beta}(\gamma_{\mu 5})_{\gamma\delta}$.

Alle anderen Regeln bleiben unverändert.

H_W in (1.3) ist noch nicht fierzinvariant formuliert. Bei der vorliegenden lokalen Wechselwirkung mit einer Sorte von Fermionen ist es bequem, den Wechselwirkungsoperator H_W in fierzinvarianter Form zu schreiben, so daß er die Eigenschaft hat, bei Vertauschung der beiden Erzeuger oder Vernichter invariant zu bleiben. Das hat zur Folge, daß alle diejenigen Graphen gleiche Beiträge liefern, die auseinander hervorgehen durch Vertauschung der beiden in einen Vertex einlaufenden bzw. der beiden aus einem Vertex auslaufenden Fermionenlinien.

Diese Eigenschaft werden wir später mit Vorteil ausnützen.

Zur Ableitung der fierzinvarianten Form vertauschen wir in H_W aus (1.3) die beiden Erzeuger und gehen zu Komponenten über. Über gleichlautende Indizes ist zu summieren.

$$(\gamma^0\gamma^{\mu 5})_{\alpha\beta}(\gamma^0\gamma_{\mu 5})_{\gamma\delta} := \Pi_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

$$H_W = \frac{W}{Z^3}\sum_{\underline{k}_1,\dots,\underline{k}_4} \psi^\dagger(\underline{k}_1)_\alpha\,\psi(\underline{k}_2)_\beta\,\psi^\dagger(\underline{k}_3)_\gamma\,\psi(\underline{k}_4)_\delta\,\Pi_{\alpha\beta\gamma\delta}\,\delta_{\underline{k}_1-\underline{k}_2,\,-\underline{k}_3+\underline{k}_4} =$$

$$= -\frac{W}{Z^3}\sum_{\underline{k}_1,\dots,\underline{k}_4} \psi^\dagger(\underline{k}_1)_\alpha\,\psi(\underline{k}_2)_\beta\,\psi^\dagger(\underline{k}_3)_\gamma\,\psi(\underline{k}_4)_\delta\,\Pi_{\gamma\beta\alpha\delta}\,\delta_{\underline{k}_1-\underline{k}_2,\,-\underline{k}_3+\underline{k}_4} +$$

$$+ W\sum_{\underline{k}} (\Pi_{\alpha\beta\beta\gamma} + \Pi_{\beta\beta\alpha\gamma})\,\psi^\dagger_\alpha(\underline{k})\,\psi(\underline{k})_\gamma =$$

$$= \frac{W}{Z^3}\sum_{\underline{k}_1,\dots,\underline{k}_4;\,j} (\bar\psi(\underline{k}_1)\Gamma_j\psi(\underline{k}_2))(\bar\psi(\underline{k}_3)\Gamma_j\psi(\underline{k}_4))\,\delta_{\underline{k}_1-\underline{k}_2,\,-\underline{k}_3+\underline{k}_4} +$$

$$+ 2\sum_{\underline{k}} \bar\psi(\underline{k})\,W\gamma^0\psi(\underline{k})$$

$$:= H_W^{FT} + 2\sum_{\underline{k}} \bar\psi(\underline{k})\,W\gamma^0\psi(\underline{k})$$

Die Γ_j in H_W^{FT}, der Fierztransformierten von H_W, bestimmt man aus der Gleichung

$$\sum_j (\gamma^0\Gamma_j)_{\alpha\beta}(\gamma^0\Gamma_j)_{\gamma\delta} = -\Pi_{\gamma\beta\alpha\delta} = -(\gamma^0\gamma^{\mu 5})_{\alpha\beta}(\gamma^0\gamma_{\mu 5})_{\gamma\delta}\,.$$

Man erhält folgende Lösung:

$$\sum_j \Gamma_j \times \Gamma_j = \gamma^5\times\gamma^5 - 1\times 1 - \frac{1}{2}\gamma^\mu\times\gamma_\mu + \frac{1}{2}\gamma^{\mu 5}\times\gamma_{\mu 5}\,.$$

Wir können demnach H_W wie folgt darstellen:

$$H_W = H_W' + \sum_{\underline{k}} \bar\psi(\underline{k})\,W\gamma^0\psi(\underline{k}) \qquad (1.9)$$

Die Kombination $H_W' = \frac{1}{2}(H_W + H_W^{FT})$ ist fierzinvariant und von der Gestalt

$$H_W' = \frac{W}{Z^3}\sum_{\underline{k}_1,\dots,\underline{k}_4;\,i} (\bar\psi(\underline{k}_1)O_i\psi(\underline{k}_2))(\bar\psi(\underline{k}_3)O_i\psi(\underline{k}_4))\,\delta_{\underline{k}_1-\underline{k}_2,\,-\underline{k}_3+\underline{k}_4} \qquad (1.10)$$

$$\sum_i O_i \times O_i = \frac{1}{2}\gamma^5\times\gamma^5 - \frac{1}{2}1\times 1 - \frac{1}{4}\gamma^\mu\times\gamma_\mu + \frac{3}{4}\gamma^{\mu 5}\times\gamma_{\mu 5} \equiv \qquad (1.11)$$

$$\equiv \tfrac{1}{2} P \times P - \tfrac{1}{2} S \times S - \tfrac{1}{4} V \times V + \tfrac{3}{4} A \times A .$$

Den Teilchenzahloperator in (1.9) schlagen wir zum Bewegungsoperator H_B.

$$H = \sum_{\underline{h}} \bar{\psi}(\underline{h})(\underline{p}\cdot\underline{\gamma} + W\gamma^0)\psi(\underline{h}) + H_W'$$

Wir folgen nun Weidemann [5] und lösen die Dysongleichung (1.8) selbstkonsistent für $\Sigma(p)$ in Hartree-Fock (HF)-Näherung. Dabei müssen wir wegen der Abänderung von H_B setzen:

$$(S_F^0(p))^{-1} = (\not{p} - W\gamma^0) \; ; \; S_F'(p) = \frac{1}{\not{p} - m} \tag{1.12}$$

$$\Sigma(p) = 2iW \sum_i O_i \left[\frac{S_F'(n-n') + S_F'(n'-n)}{2} O_i - \mathrm{Spur}(S_F'(n'-n) O_i) \right] \tag{1.13}$$

mit $(n-n') = (+\varepsilon, \underline{0})$, $\varepsilon \to 0$

$$S_F'(\pm\varepsilon, \underline{0}) = \frac{1}{2iZ^3} \sum_{\underline{h}} \frac{\pm\gamma_0 \sqrt{\underline{p}^2 + m^2} + m}{\sqrt{\underline{p}^2 + m^2}}$$

$$\Sigma(p) = \frac{4W}{Z^3} m \sum_{\underline{h}} \frac{1}{\sqrt{\underline{p}^2 + m^2}} - W\gamma^0 \tag{1.14}$$

Der Zusatz $-W\gamma^0$ entsteht aus dem Spurterm in (1.13), weil dort statt der Kombination $\frac{1}{2}[S_F'(+0) + S_F'(-0)]$ nur $S_F'(-0)$ alleine auftritt. Mit der ursprünglichen Wechselwirkung (1.3) verschwindet diese Spur. Aus der Selbstkonsistenzforderung $(S_F^0(p))^{-1} - \Sigma(p) = \not{p} - m$ ergibt sich aber genau wie mit dem Hamiltonoperator (1.3) die Gleichung

$$m = m \frac{4W}{Z^3} \sum_{\underline{h}} \frac{1}{\sqrt{\underline{p}^2 + m^2}} \; . \tag{1.15}$$

Die Zusatzterme in $(S_F^0)^{-1}$ und in $\Sigma(p)$ heben sich im Propagator gerade wieder weg.

In den folgenden Rechnungen werden wir den Teilchenzahloperator in H_B fortlassen und zur Kompensation die Unterscheidung zwischen $S_F'(+0, \underline{0})$ und $S_F'(-0, \underline{0})$ aufgeben, indem wir allgemein setzen:

$$S_F'(0) := \lim_{\varepsilon \to 0} \tfrac{1}{2}[S_F(+\varepsilon, \underline{0}) + S_F(-\varepsilon, \underline{0})] = \frac{1}{2iZ^3} m \sum_{\underline{h}} \frac{1}{\sqrt{\underline{p}(h)^2 + m^2}}$$

Diese Festsetzung erleichtert die Anwendung des Wickschen Theorems, da bei der Bildung von Kontraktionen innerhalb des

lokalen Wechselwirkungsoperators auf eine Zeitordnung verzichtet werden kann. Statt (1.3) verwenden wir also folgenden Hamiltonoperator:

$$H_B = \sum_{\underline{k}} \bar{\psi}(\underline{k})\, \underline{\gamma}\cdot\underline{p}(\underline{k})\, \psi(\underline{k})$$

$$H_W = \frac{W}{Z^3} \sum_{\underline{k}_1,..,\underline{k}_4,i} (\bar{\psi}(\underline{k}_1) O_i \psi(\underline{k}_2))(\bar{\psi}(\underline{k}_3) O_i \psi(\underline{k}_4))\, \delta_{\underline{k}_1-\underline{k}_2,-\underline{k}_3+\underline{k}_4} \qquad (1.16)$$

Die Matrizen O_i haben wir in (1.11) definiert.

1.2 Selbstkonsistenzansatz zur Lösung der Dysongleichung.

Bei einer selbstkonsistenten Berechnung des Fermionpropagators $S_F'(p)$ mit der Dysongleichung (1.8) muß man in allen Selbstenergiegraphen, die man für die Berechnung von $\Sigma(p)$ mitnimmt, bereits die resultierende Form des Propagators verwenden. Nur in HF-Näherung kommt man dabei mit einem reinen Einteilchenpropagator der Form $S_F'(p) = (\not{p}-m)^{-1}$ aus. Für höhere Näherungen muß diese Form verallgemeinert werden.

Über die Impulse aller inneren Fermionenlinien eines eigentlichen Selbstenergiegraphen, der zu $\Sigma(p)$ beiträgt, ist zu integrieren bzw. zu summieren. Man braucht für $S_F'(p)$ also eine Darstellung, in der die Impulsabhängigkeit gegeben und möglichst einfach ist.

In einer lorentzinvarianten Theorie mit Paritätsinvarianz kann $\Sigma(p)$ in zwei Teile zerlegt werden:

$$\Sigma(p) = \Sigma_V(p^2)\not{p} + \Sigma_S(p^2)$$

Das liefert mit der Dysongleichung (1.8) für den Propagator:

$$S_F'(p) = \frac{1}{\not{p}(1-\Sigma_V(p^2)) - \Sigma_S(p^2)} \qquad (1.17)$$

Diese Darstellung ist für die Integration noch nicht geeignet, da wir die Funktionen $\Sigma_S(p^2)$ und $\Sigma_V(p^2)$ nicht kennen und daher die Impulsabhängigkeit nicht gegeben ist. Falls jedoch $S_F'(p)$ in (1.17) für $p^2=m^2$ einen Einteilchenpol mit dem Residuum Z_2 besitzt, kann man Bestimmungsgleichungen für m und Z_2 angeben:

Wenn $S_F'(p) \xrightarrow{p^2=m^2} Z_2 \frac{\not{p}+m}{p^2-m^2+i\varepsilon}$ mit $0 < Z_2 \leq 1$, so folgt:

$$m = \frac{\Sigma_S(m^2)}{1-\Sigma_V(m^2)} \quad , \quad Z_2^{-1} = (1-\Sigma_V(m^2)) \geq 1 \tag{1.18}$$

Die Bedingungen (1.18) stellen damit die Verallgemeinerung der Selbstkonsistenzgleichung (1.15) dar, wo sich $\Sigma_V \equiv 0$ und $\Sigma_S(p^2) = \Sigma_S$ ergab. In diesem Fall ist $\Sigma_S = m$ und $Z_2 = 1$.

Für $S_F'(p)$ aus (1.17) existiert unter gewissen Voraussetzungen eine Spektraldarstellung, in der die Abhängigkeit von p^2 bekannt ist. Hat man neben Lorentzinvarianz und Paritätsinvarianz PCT-Invarianz, Translationsinvarianz, einen nicht ausgearteten Grundzustand niedrigster Energie, sowie einen Hilbertraum mit positiv definiter Metrik, so kann man für $S_F'(p)$ die Lehmann-Källén-Darstellung ableiten [13].

$$S_F'(p) = \int_0^\infty dM^2 \frac{\rho_1(M^2)\not{p} + \rho_2(M^2)}{p^2 - M^2 + i\varepsilon} \tag{1.19}$$

$$\rho_1, \rho_2 \text{ reell}; \ \rho_1(M^2) \geq 0 \ , \ M\rho_1(M^2) - \rho_2(M^2) \geq 0$$

Vertauschen die Operatoren $\bar{\psi}$ und ψ in der Definition (1.7) kanonisch, so erhält man zusätzlich die Bedingung

$$\int_0^\infty dM^2 \rho_1(M^2) = 1 \ .$$

Mit dem vollständigen System $|n\rangle$ der Eigenzustände zum Impulsoperator läßt sich $\rho_1(p^2)$ wie folgt darstellen:

$$4p^0 \rho_1(p^2) = \sum_n (2\pi)^3 \delta^4(p_n - p) \sum_{\alpha=1}^{4} |\langle 0|\psi_\alpha(0)|n\rangle|^2 \ ; \ p^0 \geq 0 \tag{1.20}$$

Das heißt, $\rho_1(p^2) \geq 0$, falls $|\langle 0|\psi_\alpha(0)|n\rangle|^2 \geq 0$, was in einem Hilbertraum mit positiv definiter Metrik stets der Fall ist. Auf diesen Punkt kommen wir später zurück.

Wir gehen kurz auf die analytischen Eigenschaften des Propagators ein und schreiben dazu (1.19) in folgender Form:

$$S_F'(p) = f_1(p^2 + i\varepsilon)\not{p} + f_2(p^2 + i\varepsilon) \ , \text{ wobei}$$

$$f_i(q^2) = \int_0^\infty dM^2 \frac{\rho_i(M^2)}{q^2 - M^2} \ , \ i = 1,2 \ ; \ q^2 \text{ komplex, Im } q^2 \neq 0$$

$$2i\,\mathrm{Im}\,f_i(p^2) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[f_i(p^2+i\varepsilon) - f_i(p^2-i\varepsilon)\right] = -2\pi i\,\rho_i(p^2)$$

$$\rho_i(M^2) = -\frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\,f_i(M^2) \qquad (1.21)$$

Die Funktionen $f_i(q^2)$ haben in der komplexen q^2-Ebene längs der positiven reellen Achse Diskontinuitäten, die nach (1.21) zu den Dichtefunktionen ρ_i proportional sind. Längs dieser Halbachse führt man einen Schnitt ein und definiert $f_i(q^2)$ auf einer mehrblättrigen Riemannschen Fläche. Physikalische Werte von q^2 liegen im ersten Blatt am oberen Ufer des Schnittes, $f_i(q^2)$ ist im ersten Blatt reell analytisch, Pole mit $\mathrm{Im}\,q^2 \neq 0$, die zu Resonanzen gehören, liegen nicht im ersten Blatt, ihr Einfluß zeigt sich in der Diskontinuität am Schnitt.

Die Lehmann-Källén-Darstellung (LKD) (1.19) ist ein geeigneter Ausgangspunkt für die selbstkonsistente Berechnung von $S_F'(p)$ mit der Dysongleichung in einer lorentzinvarianten Theorie. Wichtig ist dabei die einfache Abhängigkeit vom Impuls p, weil man darüber in Feynmangraphen integrieren muß.
In der Gitterraumtheorie kann eine Spektraldarstellung nur in Bezug auf die Energie E statt auf die invariante Masse p^2 angegeben werden, wobei dann die entsprechenden Dichtefunktionen ρ_i noch vom räumlichen Impuls $\underline{p}$ abhängen.

Dieser Schwierigkeit werden wir dadurch aus dem Wege gehen, daß wir uns einen lorentzinvarianten Formalismus suchen, der möglichst viele Gemeinsamkeiten mit der Gitterraumtheorie aufweist.

1.3 Einführung einer lorentzinvarianten Abschneidefunktion.

Bei der Konstruktion des Gitterraums suchte Bopp [1] möglichst die kanonische Symmetrie zu wahren, was eine Impulsbegrenzung nach oben und unten zur Folge hatte. Die bisherigen Rechnungen haben gezeigt, daß die endliche Ausdehnung des reziproken Gitters für die Endlichkeit der Ergebnisse unerläßlich war, während die endliche Zellgröße noch keine Rolle spielte. Man konnte also die Summen über Vektoren des reziproken Gitters durch Integrale ersetzen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{1}{Z^3 a^3} \sum_{\underline{k}} \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \iiint_{-\pi a^{-1}}^{+\pi a^{-1}} \frac{d^3\underline{k}}{(2\pi)^3} \; , \quad a = \frac{\ell}{\sqrt{Z}}$$

Die Länge l als mittlere Proportionale zwischen kleinster und größter Länge war damit bisher ohne Bedeutung.

Wir lassen deshalb den Aspekt der kanonischen Symmetrie außer Acht und führen eine lorentzinvariante Abschneidefunktion ein, die raumartige Impulse nach oben begrenzt.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \iiint_{-\pi a^{-1}}^{+\pi a^{-1}} \frac{d^3\underline{k}}{(2\pi)^3} \longrightarrow \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} F(k^2) \tag{1.22}$$

Wählen wir ein Δ, das vergleichbar ist mit $a^{-1} = \sqrt{Z}\,\ell^{-1}$, so soll $F(k^2)$ verschwinden, falls $-k^2 > \Delta^2$, also für $\underline{k}^2 > \Delta^2 + k_0^2$. Diese Forderung ist erfüllt mit

$$F(k^2) = \Theta(k^2 + \Delta^2) \; ; \; \Theta(x) = \begin{cases} 1 \text{ für } x > 0 \\ 0 \text{ für } x < 0 \end{cases} . \tag{1.23}$$

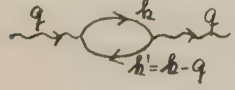
Nun sind noch einige technische Einzelheiten zu beachten. In Feynmangraphen sind nicht alle Impulse der inneren Fermionenlinien von einander unabhängig, wegen der Impulserhaltung an jedem Vertex.

Enthält im Gitterraum ein Graph z.B. drei innere Fermionenlinien mit den Vektoren $\underline{h}_1$, $\underline{h}_2$, $\underline{h}_3$ im reziproken Gitter und gilt $\underline{h}_3 = \underline{h}_1 + \underline{h}_2$, so sind auch die Komponenten des Vektors $\underline{h}_3$ nach Konstruktion beschränkt durch folgende Ungleichung:

$$-\frac{Z}{2} < (h_1^i + h_2^i) = h_3^i \leq \frac{Z}{2}$$

Um in enger Analogie zum Gitterraum zu bleiben, werden wir alle Fermionenimpulse im Inneren eines Graphen abschneiden, auch wenn über einige davon nach Berücksichtigung der Impulserhaltung an den Vertizes nicht mehr zu integrieren ist. Das Abschneideverfahren wird dadurch invariant gegen Variablensubstitutionen und äquivalent zur Propagatorregularisierung, da jedem Propagator eine Abschneidefunktion zugeordnet wird.

In konkreten Rechnungen ist die Abschneidung (1.23) recht unbequem, da über Produkte der Form $\Theta(k^2+\Delta^2)\Theta((k-q)^2+\Delta^2)\cdots$ zu integrieren ist, wie etwa in folgendem Graphen:



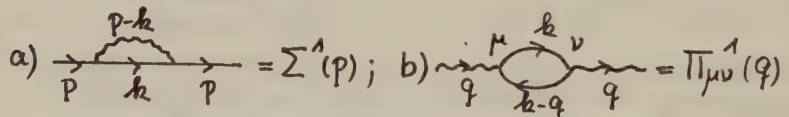
$$\longrightarrow \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Theta(k^2+\Delta^2) \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \Theta(k'^2+\Delta^2)\, \delta^4(k-k'-q)\, \text{Spur}(\cdots)$$

Wählt man aber

$$F_n(k^2) = \left(\frac{-\Delta^2}{k^2-\Delta^2+i\varepsilon}\right)^n, \qquad (1.24)$$

so lassen sich die Differenzargumente mit quadratischer Ergänzung wegschaffen. n muß dabei mindestens so groß gewählt werden, daß alle Integrale konvergieren. Für zusammenhängende Graphen kommt man bei unsèrer Wechselwirkung mit n=2 aus. In (1.24) werden große raumartige k^2 nicht abgeschnitten wie in (1.23), sondern stetig ausgeschaltet.

Das bringt Komplikationen mit sich. Wendet man nämlich (1.24) konsequent in jedem Graphen mit n=2 an, so werden gleichartigen Divergenzen in topologisch verschiedenen Graphen verschiedene endliche Werte zugeordnet. Ein Beispiel dafür sind die beiden folgenden Graphen:



Beide Graphen sind ohne Abschneidung quadratisch divergent, wie in § 1.6 noch gezeigt wird.
Schneidet man jeden inneren Fermionimpuls mit F_2 aus (1.24) ab, so ergeben sich Integrale von folgendem Typ:

$$a)\ \int d^4k\, \frac{1}{(k^2-m^2+i\varepsilon)}\, F_2(k^2);\quad b)\ \int d^4k\, \frac{k^2\cdot F_2(k^2)F_2((k-q)^2)}{(k^2-m^2+i\varepsilon)((k-q)^2-m^2+i\varepsilon)}$$

Im Fall a) wird der Integrand mit $F_2(k^2)\sim k^{-4}$ abgeschnitten, im Fall b) mit $F_2(k^2)\cdot F_2((k-q)^2)\sim k^{-8}$, wodurch die Divergenzen verschieden behandelt werden. Verwendet man dagegen (1.23), so wird in beiden Fällen der quadratischen Divergenz derselbe endliche Wert zugeordnet. Um das zu zeigen, nützt man aus, daß $\Pi_{\mu\nu}(q=0)$ die maximale Divergenz von $\Pi_{\mu\nu}(q)$ vollständig enthält und benützt die Relation $[\Theta(k^2+\Delta^2)]^2 = \Theta(k^2+\Delta^2)$, die für $F_2(k^2)$ nicht erfüllt ist.
Trotz dieser Schwierigkeiten werden wir mit der Abschneidung (1.24) als Näherung für (1.23) rechnen mit der naheliegenden Zusatzbedingung, daß n so klein gewählt wird wie möglich. Mit diesem Verfahren ergeben sich für die quadratischen Divergen-

zen sogar genau dieselben Werte, wie bei Verwendung von $F(k^2)$ aus (1.23). Die hier festgestellte Äquivalenz der beiden Abschneidemethoden geht über das angegebene Beispiel hinaus, wir wollen darauf aber nicht weiter eingehen.

1.4 Berechnung der Hartree-Fock-Näherung.

An dieser Stelle möchten wir einen ersten Eindruck davon vermitteln, wie die mit unserem Verfahren gewonnenen Ergebnisse mit denen im Gitterraum zusammenhängen. Wir berechnen dazu die Fermionmasse selbstkonsistent in HF-Näherung.

Als Ansatz dient uns $S_F'(p)$ aus (1.19) mit spezieller Wahl der Dichten:

$$\rho_1(M^2) = \delta(M^2-m^2) \quad ; \quad \rho_2(M^2) = m\,\delta(M^2-m^2) \tag{1.25}$$

Man erhält dann: $S_F'(p) = \dfrac{\not p + m}{p^2-m^2+i\varepsilon}$

Wegen der Fierzinvarianz unseres Wechselwirkungsoperators liefern beide Selbstenergiegraphen 1. Ordnung gleiche Beiträge.

$$-i\Sigma = -2ig\cdot 2\sum_j \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} F_n(k^2)\, O_j\, iS_F'(k)\, O_j \quad , \quad g = Wa^3 \tag{1.26}$$

Nach (1.11) setzen wir $2\sum_j O_j \times O_j = \gamma^5\times\gamma^5 - 1\times 1 - \frac{1}{2}\gamma^\mu\times\gamma_\mu + \frac{3}{2}\gamma^\mu\gamma^5\times\gamma_\mu\gamma^5$

Damit das Integral konvergiert, braucht man in der Abschneidefunktion aus (1.24) mindestens n=2, daher wählen wir $n=2$.

$$\Sigma = 2ig\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{(2\not k + 4m)}{(k^2-m^2+i\varepsilon)}\cdot\frac{\Delta^4}{(k^2-\Delta^2+i\varepsilon)^2}$$

$$= 8igm\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{\Delta^4}{(k^2-\Delta^2+i\varepsilon)^2(k^2-m^2+i\varepsilon)}$$

Das Integral läßt sich nach einer Wickrotation leicht berechnen.

$$\Sigma = m\,\frac{g\Delta^2}{2\pi^2}\left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m^2} - \frac{\Delta^4}{(\Delta^2-m^2)^2}\,\frac{m^2}{\Delta^2}\,\ln\frac{\Delta^2}{m^2}\right) \tag{1.27}$$

Entsprechend erhält man mit $F(k^2) = \Theta(k^2+\Delta^2)$ wie bei Nambu, Jona-Lasinio [8]

$$\Sigma = m\,\frac{g\Delta^2}{2\pi^2}\left(1-\frac{m^2}{\Delta^2}\ln\frac{\Delta^2+m^2}{m^2}\right). \tag{1.28}$$

Die Terme, die den quadratischen und logarithmischen Divergenzen entsprechen, stimmen in (1.27) und (1.28) überein. Mit dem Ausdruck (1.27) für die Selbstenergie ergibt sich nach (1.18) der Propagator in HF-Näherung und die Selbstkonsistenzbedingung.

$$S_F'(p) = \frac{1}{\not p - \Sigma(p)} = \frac{1}{\not p - m} \quad \text{falls} \quad \Sigma(p) = m \quad \text{für alle p.}$$

Nach (1.27) ist dies erfüllbar, da Σ konstant ist.

$$1 = \frac{g\Delta^2}{2\pi^2}\left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m^2} - \frac{\Delta^4}{(\Delta^2-m^2)^2}\,\frac{m^2}{\Delta^2}\ln\frac{\Delta^2}{m^2}\right), \text{ oder m=o.} \tag{1.29}$$

Eine Lösung mit $m \neq o$ kann es nur geben, falls $1 > \frac{2\pi^2}{g\Delta^2} > 0$.

Hier können wir vergleichen mit (1.15), der entsprechenden Gleichung im Gitterraum [6]:

$$1 = \frac{4W}{Z^3}\sum_{\underline{h}}\frac{1}{\sqrt{p^2(\underline{h})+m^2}}, \text{ oder m=o.}$$

Wir diskutieren (1.29) zunächst unter der Annahme $m^2 \ll \Delta^2$, was für Massen physikalischer Teilchen sicher der Fall ist, da wir $\Delta^2 \sim Z\cdot\ell^{-2}$ angenommen haben. Dann ist $\frac{m^2}{\Delta^2}\ln\frac{\Delta^2}{m^2} \ll 1$.

Die Forderung nach endlicher Masse m legt g auf einen praktisch konstanten Wert fest.

$$g \approx 2\pi^2\Delta^{-2} \tag{1.30}$$

Die Diskussion [6] von (1.15) ergab für endliche Massen m einen im selben Sinne konstanten Wert für W.

$$W \approx \frac{1{,}1}{4}\frac{\sqrt{Z}}{\ell} = \frac{1{,}1}{4}a^{-1} \tag{1.31}$$

Benützen wir die Relation $g=Wa^3$ aus (1.5), so erhalten wir eine Beziehung zwischen Z im Gitterraum und unserem Abschneideparameter Δ:

$$2\pi^2\Delta^{-2} = g = Wa^3 = \frac{1{,}1}{4}\frac{\sqrt{Z}}{\ell}\left(\frac{\ell}{\sqrt{Z}}\right)^3 \quad , \quad \Delta^2 = \frac{8\pi^2}{1{,}1}\frac{Z}{\ell^2}$$

an sieht, daß die von uns eingeführte kleinste Länge Δ^{-1} n HF-Näherung mit a vergleichbar ist, wie wir im Anschluß an (1.22) gefordert haben.

$$\Delta^{-1} = \sqrt{\frac{1,1}{8\pi^2}}\,\frac{l}{\sqrt{Z}} = \sqrt{\frac{1,1}{8\pi^2}}\,a \tag{1.32}$$

Wählt man in (1.29) m^2 vergleichbar mit Δ^2, etwa $m^2 = \Delta^2$, so liefert die Selbstkonsistenzgleichung $g\Delta^2 = 4\pi^2$, auch hier bleibt $g \sim \Delta^{-2}$.

Entsprechend sind mit $W \sim \sqrt{Z}$ in (1.15) Werte für m^2 bis in die Größenordnung Z verträglich. Auch daraus läßt sich schließen, daß wir $\Delta^2 \sim Z$ wählen müssen, damit Äquivalenz besteht zwischen den Aussagen der beiden Selbstkonsistenzgleichungen (1.15) und (1.29).

Das bedeutet, eine endliche Fermionenmasse in HF-Näherung kann man nur mit einer Kopplungskonstanten g erhalten, die für $\Delta^2 \to \infty$ bzw. $Z \to \infty$ verschwindet, denn $g = 2\pi^2\Delta^{-2} = \frac{1,1}{4}\,l^2 Z^{-2}$. Der Ausdruck (1.26) für Σ ist ohne Abschneidung quadratisch divergent, was mit Regularisierung zum Faktor Δ^2 neben der Kopplungskonstanten g führt, wie (1.27) zeigt. Die Masse ist also in HF-Näherung im wesentlichen durch die quadratische "Divergenz" alleine bestimmt. Das wird sich in höheren Näherungen noch ändern.

Zum Schluß wollen wir noch kurz das Problem der Touschekinvarianz berühren, das bei Nambu [8] ausführlich behandelt ist. Der Hamiltonoperator (1.1) ist invariant bei folgender Transformation der Feldoperatoren:

$$\begin{aligned} \psi &\to U(\alpha)\,\psi\,U^{-1}(\alpha) = e^{i\alpha\gamma_5}\psi \\ \bar\psi &\to U(\alpha)\,\bar\psi\,U^{-1}(\alpha) = \bar\psi\, e^{i\alpha\gamma_5} \end{aligned} \tag{1.33}$$

Fordert man die Touschekinvarianz auch für den Grundzustand, d.h. $|0_\alpha\rangle := U^{-1}(\alpha)|0\rangle = |0\rangle$, so erhält man für den Propagator folgende Bedingung:

$$\begin{aligned} S_F'(x-x') &= \langle 0|T\psi(x)\bar\psi(x')|0\rangle = \langle 0_\alpha|T\psi(x)\bar\psi(x')|0_\alpha\rangle = \\ &= \langle 0|TU(\alpha)\psi(x)U^{-1}(\alpha)U(\alpha)\bar\psi(x')U^{-1}(\alpha)|0\rangle = \end{aligned}$$

$$= e^{i\alpha\gamma_5} \langle 0|T\psi(x)\bar{\psi}(x')|0\rangle e^{i\alpha\gamma_5} =$$

$$= e^{i\alpha\gamma_5}\, iS_F'(x-x')\, e^{i\alpha\gamma_5}.$$

Diese Bedingung ist nur erfüllt, wenn in der LKD von (1.19) der Massenterm identisch verschwindet, also für $\rho_2(M^2) \equiv 0$. Der Selbstkonsistenzansatz (1.25) für die HF-Näherung setzt also voraus, daß der Grundzustand die Touschekinvarianz bricht, der Grundzustand ist entartet.

Damit steht man vor dem Problem, mit welcher Form des Grundzustandes der Propagator zu berechnen ist. Wählen wir z.B. $|0_\alpha\rangle$ statt $|0\rangle$, so nimmt (1.19) folgende Gestalt an:

$$S_F'(p;\alpha) = e^{i\alpha\gamma_5} S_F'(p) e^{i\alpha\gamma_5} = \int_0^\infty \frac{\rho_1(M^2)\,\not{p} + e^{2i\alpha\gamma_5}\rho_2(M^2)}{p^2 - M^2 + i\varepsilon}$$

Für den Spezialfall der HF-Näherung mit $S_F'(p) = \frac{\not{p}+m}{p^2-m^2+i\varepsilon}$ erhält man $S_F'(p;\alpha) = \frac{\not{p} + e^{2i\alpha\gamma_5} m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$. (1.34)

Mit diesem Propagator berechnen wir die Massenmatrix $\Sigma(\alpha)$ in HF-Näherung wie im Anschluß an (1.26):

$$-i\Sigma(\alpha) = -4ig \sum_j \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} F(k^2)\, O_j\, iS_F'(k;\alpha)\, O_j =$$

$$= -4ig e^{-i\alpha\gamma_5} \left\{ \sum_j \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} F(k^2) e^{i\alpha\gamma_5} O_j e^{i\alpha\gamma_5}\, iS_F'(k) e^{i\alpha\gamma_5} O_j e^{i\alpha\gamma_5} \right\} e^{-i\alpha\gamma_5}$$

Wegen der Touschekinvarianz des Wechselwirkungsoperators gilt:

$$\sum_j \left(e^{i\alpha\gamma_5} O_j e^{i\alpha\gamma_5}\right)_{\alpha\beta} \left(e^{i\alpha\gamma_5} O_j e^{i\alpha\gamma_5}\right)_{\gamma\delta} = \sum_j (O_j)_{\alpha\beta} (O_j)_{\gamma\delta}.$$

Damit ergibt sich mit Σ aus (1.26) für den Propagator:

$$\Sigma(\alpha) = e^{-i\alpha\gamma_5} \Sigma e^{-i\alpha\gamma_5} \;;\; S_F'(p;\alpha) = e^{i\alpha\gamma_5} \frac{1}{\not{p} - \Sigma} e^{i\alpha\gamma_5}$$

Ist $\Sigma = m$, wie in (1.29), dann kommt man wieder zu $S_F'(p;\alpha)$ aus (1.34) zurück.

Die Beschränkung auf einen speziellen Zustand $|0_\alpha\rangle$ des Entartungsraumes ist selbstkonsistent. Für jedes feste α mit $0 \leq \alpha < 2\pi$ ergibt sich dieselbe Massengleichung.

1.5 Kopplungskonstante als Funktion der kleinsten Länge.

Wir stellen die Hamiltonoperatoren der Gitterraumtheorie und der entsprechenden Kontinuumstheorie explizit gegenüber.

$$
\begin{aligned}
H^G &= -i\frac{\hbar c}{2a}\sum_{\underline{n},k}\bar{\psi}(\underline{n})\gamma^k\left(\psi(\underline{n}+\underline{e}_k)-\psi(\underline{n}-\underline{e}_k)\right)\\
&\quad + W\hbar c\sum_{\underline{n}}\left(\bar{\psi}(\underline{n})\gamma^{\mu 5}\psi(\underline{n})\right)\left(\bar{\psi}(\underline{n})\gamma_{\mu 5}\psi(\underline{n})\right)\\
H^K &= -i\hbar c\int d^3\underline{x}\;\bar{\psi}(\underline{x})\underline{\gamma}\cdot\underline{\nabla}_{\underline{x}}\psi(\underline{x})\\
&\quad + g\hbar c\int d^3\underline{x}\left(\bar{\psi}(\underline{x})\gamma^{\mu 5}\psi(\underline{x})\right)\left(\bar{\psi}(\underline{x})\gamma_{\mu 5}\psi(\underline{x})\right)
\end{aligned}
\qquad (1.35)
$$

Die Vertauschungsrelationen lauten:

$$
\begin{aligned}
\left\{\psi_\mu(\underline{n}),\psi_\nu^+(\underline{n}')\right\}_+ &= \delta_{\mu\nu}\delta_{\underline{n},\underline{n}'}\\
\left\{\psi_\mu(\underline{x}),\psi_\nu^+(\underline{x}')\right\}_+ &= \delta_{\mu\nu}\delta^3(\underline{x}-\underline{x}')
\end{aligned}
\qquad (1.36)
$$

Daher hat $\psi(\underline{n})$ die Dimension 1, während $\psi(\underline{x})$ die Dimension $(cm)^{-3/2}$ hat.
Die Wechselwirkungsanteile in H^G und H^K haben nur dann die Dimension einer Energie, wenn man setzt:

$$\mathrm{Dim}(W) = cm^{-1} \quad ; \quad \mathrm{Dim}(g) = cm^2.$$

Die Relation $g = Wa^3 = W\sqrt{Z}^{-3}l^3$ zeigt, daß für $Z\to\infty$ nicht g und W gleichzeitig endlich sein können.

Berechnet man im Rahmen der Kontinuumstheorie mit der in § 1.3 eingeführten Abschneidung physikalisch messbare Größen, etwa Streuquerschnitte, Massen oder Kopplungskonstanten, dann sind zwei Möglichkeiten denkbar:

1) Die Abhängigkeit dieser Größen vom Abschneideparameter ist so, daß ein Grenzübergang $\Delta\to\infty$ möglich ist, ohne daß die Ergebnisse divergent oder trivial werden. Als einziger Längenmaßstab bleibt dann $\sqrt{g}$ übrig, da die freien Fermionen masselos angenommen wurden. Die Massen physikalischer Teilchen werden daher zu $\sqrt{g}^{-1}$ proportional sein, so daß $\sqrt{g}$ nukleare Größenordnung haben sollte, etwa $\sqrt{g}=1$. Übersetzung in die Gitterraumtheorie liefert $W = l^{-1}\sqrt{Z}^3$. Aus (1.35) erkennt man,

daß für $W \sim \sqrt{z^3}$ der Wechselwirkungsanteil von H^3 dominiert, die Störungstheorie in der üblichen Form wird deshalb nicht sinnvoll sein. In diesem Zusammenhang verweisen wir auf die Arbeit von Bopp und Maier-Bötzel [14], in der mit umgekehrter Störungsrechnung insbesondere der Fall $W \sim \sqrt{z^3}$ erfaßt wird.

2) Endliche und nicht triviale Ergebnisse sind nur mit endlichem Abschneideparameter Δ möglich. Die Abschneidung hat also im Gegensatz zum ersten Fall nicht nur methodische Bedeutung für die Berechnung, sondern sie ist wesentlicher Bestandteil der Theorie. Δ^{-1} stellt eine charakteristische Grenze für die Auflösbarkeit von Strukturen dar, denn die Abschneidung im Impulsraum entspricht einer Nichtlokalität im Ortsraum. Bezieht man alle Größen mit Längendimension auf die Einheit Δ^{-1}, so erhält man für g die Darstellung $g = g' \Delta^{-2}$ Die HF-Näherung liefert nach (1.30) $g' = 2\pi^2$. Dem entspricht nach (1.31) im Gitterraum die Relation $W = W' a^{-1} = W' L^{-1} \sqrt{z}$ mit $W' = \frac{11}{4}$. Bezieht man also beide Kopplungskonstanten auf eine Längeneinheit der Größenordnung $1 \cdot \sqrt{z}^{-1}$, so erhält man in HF-Näherung das bemerkenswert symmetrische Ergebnis, daß sowohl W' als auch g' endlich sind. Im nächsten Paragraphen werden wir zeigen, daß mit endlichem $g' = g\Delta^2$ jeder verbundene Einzelgraph beliebig hoher Ordnung endlich ausfällt.

Man kann vermuten, daß bei der Massenberechnung schon durch die Wahl des Näherungsverfahrens die Weichen gestellt werden, zu welcher der beiden aufgezeigten Möglichkeiten man gelangt. Wir haben bereits bemerkt, daß die übliche Störungstheorie, die wir verwenden wollen, für $\sqrt{g} = 1$ nicht anwendbar ist, so daß wir in dieser Arbeit nicht entscheiden können, ob sich dieser Fall realisieren läßt.

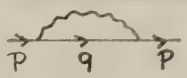
1.6 Abhängigkeit vom Abschneideparameter bei Graphen n-ter Ordnung.

Es muß geklärt werden, ob höhere Näherungen für die Selbstenergie des Fermions eine andere Abhängigkeit der Kopplungskonstanten g vom Abschneideparameter Δ erfordern, will man zu Massen in physikalisch vernünftiger Größenordnung gelangen.

Dazu zählen wir zunächst bei Selbstenergiegraphen des Fermions, danach bei Vakuumpolarisationsgraphen die Impulspotenzen des Zählers und Nenners einschließlich der Integrationselemente ab. Der Divergenzgrad ist die Differenz der Zähler- und Nennerpotenzen.

Es sei n die störungstheoretische Ordnung des Graphen, die mit der Zahl der Wechselwirkungslinien übereinstimmt,
f die Anzahl der inneren Fermionenlinien,
I die Anzahl der Impulsvariablen, über die noch zu integrieren ist, wenn man Impulserhaltung an jedem Vertex berücksichtigt hat.

Für n=1 haben wir wegen der Lorentzinvarianz nur einen Graphen zu betrachten: $\Sigma^1(p) =$



Hier ist n=1, f=1, I=1.

Bei jedem Einfügen einer zusätzlichen Wechselwirkungslinie in $\Sigma^1(p)$ erhöht sich die Zahl der Fermionen um zwei, die Za. der freien Impulse um eins, wenn der resultierende Selbstenergiegraph wieder zusammenhängend ist.

Daher hat ein Selbstenergiegraph n-ter Ordnung f=2n-1 innere Fermionen mit Impulsen p_i, davon sind aber nur I=n Impulse q_j frei. Sei p der äußere Impuls, dann gelten Gleichungen der Form

$$p_i = \alpha_i^0 p + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} q_j \quad , \quad i = 1,2,\ldots,(2n-1). \qquad (1.37)$$

Die Fouriertransformierte unserer lokalen Wechselwirkung ist im Impulsraum eine Konstante. Von jeder inneren Fermionlinie, dargestellt durch $S_F(p_i)=(\not{p}_i - m)^{-1}$, erhält man mindestens eine Impulspotenz im Nenner, jedes Integrationselement d^4q_j liefert vier Potenzen im Zähler. Daraus ergibt sich für den Divergenzgrad D zunächst folgende obere Schranke:

$$D(\Sigma^n) = 4I-f = 4n-(2n-1) = 2n+1$$

Die Lorentzinvarianz gestattet für $\Sigma^n(p)$ die Darstellung

$$\Sigma^n(p) = \Sigma_S^n(p^2) + \Sigma_V^n(p^2)\not{p}.$$

Zu $\Sigma_S^n(p^2)$ können vom Produkt der (2n-1) Fermionpropagatoren

$\prod_{i=1}^{2n-1} \frac{\not p_i + m}{p_i^2 - m^2 + i\varepsilon}$ nur solche Anteile beitragen, die eine gerade Zahl von Faktoren $\not p_i$ enthalten, also maximal (2n-2). Daneben tritt mindestens ein Faktor m auf. Der maximale Divergenzgrad $D_{max}(\Sigma_s^n)$ ist also kleiner als $D(\Sigma^n)$;

$$D_{max}(\Sigma_s^n) = 2n \tag{1.38}$$

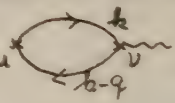
Zu $\Sigma_v^n(p^2)\not p$ tragen jene Anteile bei, die im Zähler eine ungerade Zahl von Faktoren $\not p_i$ enthalten. Jedes der $\not p_i$ denken wir uns durch (1.37) dargestellt. Multipliziert man solche Produkte aus, so gibt es Faktoren, die kein $\not p$ enthalten. Diese verschwinden bei der Integration, weil sie antisymmetrisch in irgend einer Integrationsvariablen q_j sind. Die anderen Terme enthalten $\not p$, wodurch sich die Potenz des Integranden mindestens um eins erniedrigt.

$$D_{max}(\Sigma_v^n) = 2n \tag{1.39}$$

Die eingeführte Abschneidung liefert für jede dieser "Divergenzen" einen Faktor Δ . Nach unserer Abzählung haben die Terme in $\Sigma_v^n(p^2)$ und $\Sigma_s^n(p^2)$ mit dem maximalen Divergenzgrad den Faktor $g^n\Delta^{2n} = (g\Delta^2)^n = g'^n$.
Es tritt genau die Kombination $g' = g\Delta^2$ auf, die bei unserer Dimensionsbetrachtung in § 1.5 eine ausgezeichnete Rolle spielte und die in HF-Näherung berechnet wurde.

Im Gegensatz zur Quantenelektrodynamik gibt es bei unserer Wechselwirkung keine Subgraphen [15], die einen größeren Divergenzgrad haben als der Gesamtgraph. Die Endlichkeit der Größe $g' = g\Delta^2$ ist nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend für die Endlichkeit jedes einzelnen Selbstenergiegraphen.

Nun berechnen wir noch D_{max} für Vakuumpolarisationsgraphen. Der einfachste dieser Art hat die Gestalt:

$\Pi^1_{\mu\nu}(q) =$ 

$n = 1,\ f = 2,\ I = 1.$

$D_{max}(\Pi^1) = 4I - f = 2$

Die größten Anteile in Π^1 haben den Vorfaktor $g\Delta^2$.
Jede zusätzliche Wechselwirkungslinie liefert maximal einen

Faktor $g\Delta^2$, so daß wir für zusammenhängende Vakuumpolarisationsgraphen n-ter Ordnung erhalten:

$$D_{max}(\Pi^n_{\mu\nu}) = 2n \tag{1.40}$$

Wir fassen zusammen:

Wenn die Kombination $g\Delta^2$ endlich ist, dann ist jeder einzelne, zusammenhängende Selbstenergie- und Vakuumpolarisationsgraph endlich in dem Sinne, daß nach dem Faktor $(g\Delta^2)^n$ in Graphen n-ter Ordnung nur Funktionen stehen, die im Grenzübergang $\Delta^2 \to \infty$ endlich bleiben. Über die Konvergenz der Störungsreihe ist dadurch nichts ausgesagt.

Bei der Abzählung ging ganz wesentlich die Lokalität der Wechselwirkung ein. Man muß sich fragen, was sich ändert, wenn bei der Aufsummation von Vakuumpolarisationsgraphen ein bosonartiger Bindungszustand herauskommen sollte. Die effektive Wechselwirkung ist dann nicht mehr lokal. Im Impulsraum bedeutet das folgenden Übergang:

$$1 \longrightarrow \frac{c}{q^2-\mu^2+i\varepsilon} \qquad \mathrm{Dim}(c) = \mathrm{cm}^{-2}. \tag{1.41}$$

μ ist die Masse des Bindungszustandes.

Es ist aber zu bedenken, daß bei der Abzählung nur das Verhalten für $q^2 \to \infty$ eine Rolle spielt. Asymptotisch wird man erwarten, daß sich wieder die bare Wechselwirkung ergibt, die bei uns lokal ist. Trotzdem kann sich bei der Berechnung von Selbstenergiegraphen mit der effektiven Wechselwirkung eine höhere Divergenz einstellen, als nach unserer Abzählung in (1.38) und (1.39) zu erwarten ist, nur ist dies sicher keine Ultraviolettdivergenz, sondern eine Folge der Aufsummation, die zur effektiven Wechselwirkung führte. Dieses Problem behandeln wir später noch ausführlich.

1.7 Unterschiede zur Heisenbergtheorie.

In § 1.3 hatten wir jeder Integrationsvariablen eine Abschneidefunktion zugeordnet. Hier möchten wir vorübergehend einen anderen Standpunkt einnehmen.

Nach den Graphenregeln ist über den Impuls jeder inneren Fermionlinie zu integrieren, die Impulserhaltung an jedem Vertex wird durch δ^4-Funktionen berücksichtigt. So wie wir

die Abschneidung eingeführt haben, enthält ein beliebiger Feynmangraph zu jedem $S_F'(p_i)$ eine Abschneidefunktion $F(p_i^2)$ in derselben Variablen. Wir können einen neuen Propagator definieren, für den wir ähnlich wie für $S_F'(p)$ eine Spektraldarstellung der Form (1.19) ableiten wollen.

$$S_F'(p) = \int_0^\infty dM^2 \frac{\rho_1(M^2)\not{p} + \rho_2(M^2)}{p^2 - M^2 + i\varepsilon}$$

$$(S_F')_{reg}(p) = S_F'(p) F_2(p^2) = \int_0^\infty dM^2 \frac{\rho_1(M^2)\not{p} + \rho_2(M^2)}{p^2 - M^2 + i\varepsilon} \left(\frac{-\Delta^2}{p^2 - \Delta^2 + i\varepsilon}\right)^2 \tag{1.42}$$

$$:= \int_0^\infty dM^2 \frac{\tilde\rho_1(M^2)\not{p} + \tilde\rho_2(M^2)}{p^2 - M^2 + i\varepsilon} := \tilde f_1(p^2 + i\varepsilon)\not{p} + \tilde f_2(p^2 + i\varepsilon)$$

Die neuen Spektraldichten $\tilde\rho_i(M^2)$, i=1,2, können sicher nicht mehr die Eigenschaften haben, die wir für $\rho_i(M^2)$ im Anschluß an (1.19) angegeben hatten, sonst würden alle Graphen divergieren, wie wir bei unserer Abzählung festgestellt haben. Die $\tilde\rho_i(M^2)$ können wie in (1.21) berechnet werden:

$$\tilde\rho_i(p^2) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \tilde f_i(p^2) = -\frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\tilde f_i(p^2 + i\varepsilon) - \tilde f_i(p^2 - i\varepsilon)\right) \tag{1.43}$$

Wir verwenden $\frac{1}{(x \pm i\varepsilon)^{n+1}} = Pf \frac{1}{x^{n+1}} \mp i\pi \frac{(-1)^n}{n!} \delta^{(n)}(x)$ für $\varepsilon \to 0$.

$$-2\pi i\, \tilde\rho_i(p^2) = \frac{\Delta^4}{(p^2 - \Delta^2 + i\varepsilon)^2} \int_0^\infty dM^2 \frac{\rho_i(M^2)}{p^2 - M^2 + i\varepsilon} - \frac{\Delta^4}{(p^2 - \Delta^2 - i\varepsilon)^2} \int_0^\infty dM^2 \frac{\rho_i(M^2)}{p^2 - M^2 - i\varepsilon}$$

$$= \left[Pf \frac{\Delta^4}{(p^2 - \Delta^2)^2} + i\pi\Delta^4 \delta'(p^2 - \Delta^2)\right] \left[\int\!\!\!\!\!\!- \int_0^\infty dM^2 \frac{\rho_i(M^2)}{p^2 - M^2} - i\pi \rho_i(p^2)\right]$$

$$- \left[Pf \frac{\Delta^4}{(p^2 - \Delta^2)^2} - i\pi\Delta^4 \delta'(p^2 - \Delta^2)\right] \left[\int\!\!\!\!\!\!- \int_0^\infty dM^2 \frac{\rho_i(M^2)}{p^2 - M^2} + i\pi \rho_i(p^2)\right]$$

Mit $\int\!\!\!\!\!\!- \int_0^\infty dM^2$ bezeichnen wir das Hauptwertintegral.

$$-2\pi i\, \tilde\rho_i(p^2) = 2\pi i\, \delta'(p^2 - \Delta^2) \int\!\!\!\!\!\!- \int_0^\infty dM^2 \rho_i(M^2) \frac{\Delta^4}{p^2 - M^2} - 2\pi i\, \rho_i(p^2) Pf \frac{\Delta^4}{(p^2 - \Delta^2)^2}$$

$$\tilde\rho_i(m^2) = \rho_i(m^2) Pf \frac{\Delta^4}{(\Delta^2 - m^2)^2} - \delta(m^2 - \Delta^2) \int\!\!\!\!\!\!- \int_0^\infty dM^2 \rho_i(M^2) \frac{\Delta^4}{(\Delta^2 - M^2)^2} \tag{1.44}$$

$$- \delta'(m^2 - \Delta^2) \int\!\!\!\!\!\!- \int_0^\infty dM^2 \rho_i(M^2) \frac{\Delta^4}{\Delta^2 - M^2} \qquad i = 1,2$$

Für $m^2 \ll \Delta^2$ bleibt $\tilde{\rho}_i(m^2) \approx \rho_i(m^2)$

Wesentlicher als die Abänderung der Spektraldichten $\rho_i(m^2)$ durch den Faktor $Pf \frac{\Delta^4}{(\Delta^2-m^2)^2}$ sind die für $m^2=\Delta^2$ neu hinzugetretenen Terme proportional $\delta(m^2-\Delta^2)$ bzw. $\delta'(m^2-\Delta^2)$. Durch sie geht die Eigenschaft $\rho_1(m^2) \geq 0$ für das neue $\tilde{\rho}_1(m^2)$ verloren. Um das deutlicher zu zeigen, berechnen wir:

$$\int_0^\infty dm^2 \tilde{\rho}_1(m^2) = \int_0^\infty dm^2 \rho_1(m^2) \frac{\Delta^4}{(m^2-\Delta^2)^2} - \int_0^\infty dm^2 \delta(m^2-\Delta^2) \int_0^\infty dM^2 \rho_1(M^2) \frac{\Delta^4}{(\Delta^2-M^2)^2}$$

$$- \int_0^\infty dm^2 \delta'(m^2-\Delta^2) \int_0^\infty dM^2 \rho_1(M^2) \frac{\Delta^4}{\Delta^2-M^2} = 0 \qquad (1.45)$$

Analog ergibt sich:

$$\int_0^\infty dm^2 \, m^2 \rho_1(m^2) = 0 \qquad (1.46)$$

Wir erinnern an den Zusammenhang (1.20), der $\rho_1(P^2)$ mit Übergangswahrscheinlichkeiten in Verbindung bringt und stellen fest, daß der Propagator $(S_F')_{reg}(P)$ zu einer Theorie im Hilbertraum mit indefiniter Metrik gehört. Die Vertauschungsrelationen der Feldoperatoren sind zudem nicht mehr kanonisch, sonst müßte gelten $\int_0^\infty \rho_1(M^2) dM^2 = 1$ anstatt (1.45). Darin liegt die Gemeinsamkeit mit der Heisenbergtheorie [16]. Um aber auch den Unterschied deutlich sichtbar zu machen, ändern wir (1.42) in naheliegender Weise ab:

$$(S_F')_{reg}(P) = \int_0^\infty dM^2 \frac{\rho_1(M^2) \not{P} + \rho_2(M^2)}{P^2-M^2+i\varepsilon} \left(\frac{M^2-\Delta^2}{P^2-\Delta^2+i\varepsilon} \right)^2 \qquad (1.47)$$

Zu dieser Regularisierung der ursprünglichen LKD in (1.19) kommt man durch die Ersetzung

$$\frac{1}{P^2-M^2} \longrightarrow \frac{1}{P^2-M^2} - \frac{1}{P^2-\Delta^2} - \frac{M^2-\Delta^2}{(P^2-\Delta^2)^2} = \frac{1}{(P^2-M^2)} \frac{(M^2-\Delta^2)^2}{(P^2-\Delta^2)^2} . \qquad (1.48)$$

Wieder kann man zu den Dichten $\tilde{\rho}_i(m^2)$ gelangen mit der Gleichung (1.43):

$$\tilde{\rho}_i(m^2) = \rho_i(m^2) - \delta(m^2-\Delta^2) \int_0^\infty dM^2 \rho_i(M^2) - \delta'(m^2-\Delta^2) \int_0^\infty (\Delta^2-M^2) \rho_i(M^2) dM^2$$

Hier gilt für $m^2 \neq \Delta^2$ exakt $\tilde{\rho}_i(m^2) = \rho_i(m^2)$, i = 1,2 (1.49)

Die Gleichungen (1.45) und (1.46) gelten unverändert.

$$\int_0^\infty dm^2 \tilde{\rho}_i(m^2) = 0 \quad , \quad \int_0^\infty dm^2 m^2 \tilde{\rho}_i(m^2) = 0$$

Nur an der Stelle $m^2 = \Delta^2$ werden die Spektraldichten $\rho_i(m^2)$ abgeändert, es tauchen negative Übergangswahrscheinlichkeiten auf, die zu "Geistern" gehören.

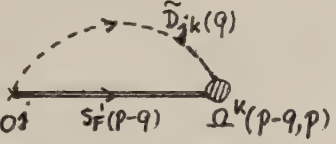
Setzt man hier $\Delta^2 = 0$, so liegt genau die Situation der Heisenbergschen Theorie vor. Wollen wir bei der Analogie zur Gitterraumtheorie bleiben, so können wir in unserem Rahmen nicht $\Delta^2 = 0$ setzen, da am Ausgangspunkt unserer Überlegungen die Abschneidung großer räumlicher Impulse in der Größenordnung Δ stand. Der regularisierte Propagator in der Form (1.42) oder (1.47) unterscheidet sich also wesentlich vom Heisenbergschen Propagator. In der Heisenbergtheorie gibt es kein Analogon zu unserer kleinsten Länge Δ^{-1}, die einzige Länge, die dort vorkommt, ist $\sqrt{g} = 1$.

Mit der obigen Überlegung ist aber gezeigt, daß unsere Theorie in einem Hilbertraum mit definiter Metrik durch die Einführung einer Abschneidefunktion im Impulsraum äquivalent wird zu einer lokalen Theorie mit indefiniter Metrik.[17]

2. Die effektive Wechselwirkung in Leiter- und Kettennäherung.

2.1 Auswahl einer Teilreihe von Selbstenergiegraphen zur Berechnung der Massenmatrix.

Wir wollen $\Sigma(p)$ mit der Dysongleichung (1.8) selbstkonsistent berechnen und müssen deshalb für alle Fermionpropagatoren, die in $\Sigma(p)$ auftreten, die LKD einsetzen. Wie in der Quantenelektrodynamik gehen wir vom allgemeinsten Ansatz für $\Sigma(p)$ aus [18].

$\Sigma(p) =$ 

(2.1)

S_F : exakte Fermionlinie.

$\tilde{D}_{ik}$: effektive Wechselwirkung mit Berücksichtigung der Vakuumpolarisation.

δ_{ik} : lokale, fierzinvariante Ausgangswechselwirkung.

Ω^k : durch Korrektur von O^k entstandener Vertex.

$\tilde{D}_{jk}$ ist eine Kästchenmatrix, deren Indizes j,k den verschiedenen Matrizen O^j aus (1.11) zugeordnet sind.

$$O^j = (O^S, O^V, O^P, O^B) := (i\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,1, \tfrac{i}{2}\gamma^\mu, \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,\gamma^5, \sqrt{\tfrac{3}{4}}\,\gamma^{\mu 5}) \qquad (2.2)$$

δ_{jk} ist eine Matrix, die nur in der Diagonalen Kästchen hat, in denen 1 für j = P,S und $g_{\mu\nu}$ für j = V,A steht.

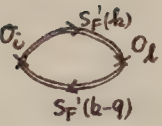
Die effektive Wechselwirkung $\tilde{D}_{jk}(q)$ genügt einer analogen Gleichung wie der exakte Photonpropagator in der Elektrodynamik [18].

$$\tilde{D}_{jk} = \delta_{jk} + \delta_{ji}\,\tilde{\Pi}_{il}\,\tilde{D}_{lk} \qquad (2.3)$$

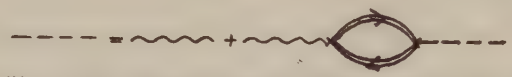
$\tilde{\Pi}_{il}$ enthält alle eigentlichen Vakuumpolarisationsgraphen.

Die einfachste Verbesserung der HF-Näherung für $\Sigma(p)$ erhält man durch Berücksichtigung der Vakuumpolarisation in niedrigster Näherung:

$$\tilde{\Pi}_{jl}(q) = \quad (2.4)$$



Mit dieser Spezialisierung stellt (2.3) die Kettennäherung dar:



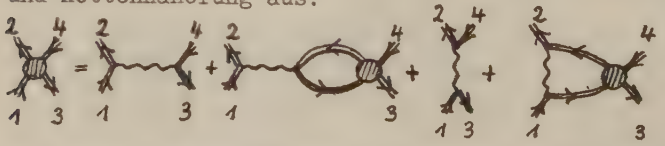
(2.5)

Man erhält eine geometrische Reihe, die sich leicht aufsummieren läßt. Setzt man in $\Sigma(p)$ von Gleichung (2.1) für $\tilde{D}_{jk}$ die Reihe (2.5) ein und läßt den Vertex unkorrigiert $(\Omega^k = C^k)$, so ergibt sich folgende Reihe von Selbstenergiegraphen:

(2.6)

Weil bei unserer lokalen Vierfermionenwechselwirkung Graph und zugeordnete Austauschgraphen Prozesse darstellen, die im Prinzip nicht unterscheidbar sind, begnügen wir uns nicht mit der Graphenauswahl in (2.6), sondern nehmen zu den bereits berücksichtigten Graphen noch deren Austauschgraphen mit hinzu. Wichtig dabei ist, daß die so erweiterte Reihe ebenfalls noch einfach aufsummierbar bleibt. Dabei nützen wir jetzt aus, daß bei fierzinvarianter Wechselwirkung alle diejenigen Graphen identische Beiträge liefern, die auseinander hervorgehen durch Austausch von zwei in einen Vertex einlaufenden bzw. aus einem Vertex auslaufenden Fermionlinien. Es genügt also, einen Graphen zu betrachten und die Austauschgraphen durch einen Zahlenfaktor zu berücksichtigen. Dieser Zahlenfaktor ist für die Graphen der Reihe (2.6) zu bestimmen.

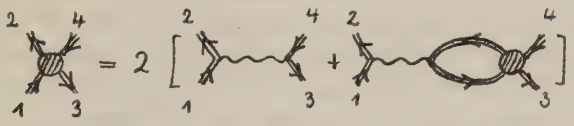
Dazu gehen wir von der Teilchen-Loch-Streuung in Leiter- und Kettennäherung aus:



(2.7)

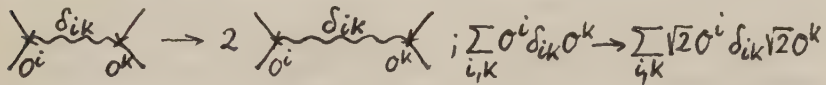
Die beiden letzten Graphen entstehen durch Austausch aus den

beiden ersten. Wegen der Fierzinvarianz können wir für (2.7) auch schreiben:

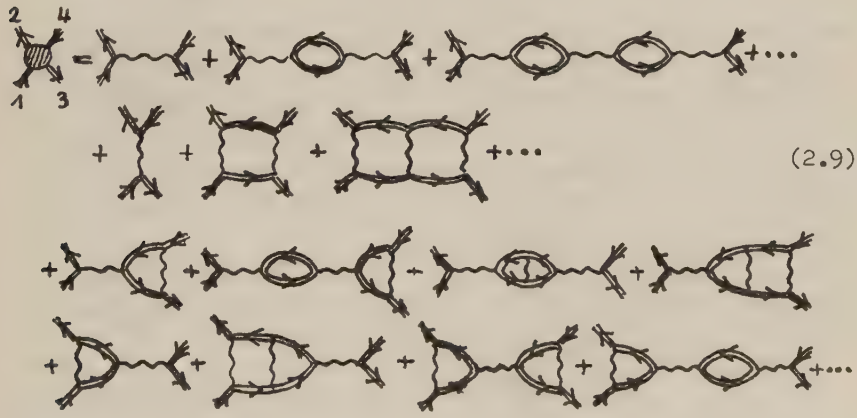


(2.8)

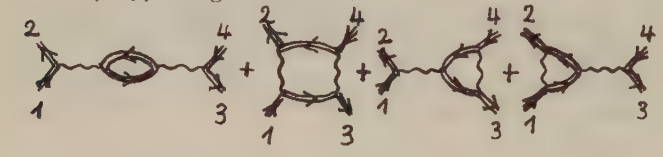
Den Faktor zwei stecken wir in die lokale Ausgangswechselwirkung bzw. in die zugehörigen Vertizes.

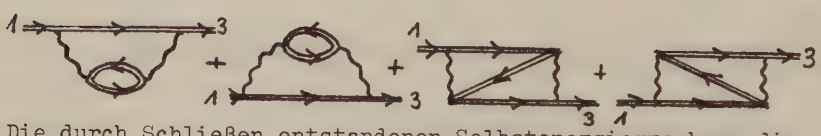


Die Reihe (2.7) geben wir bis zu Gliedern 3. Ordnung explizit an:


2
4
1
3
=
+
+
+

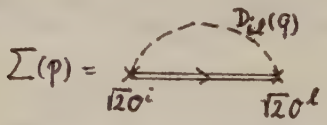
Falls beim Schließen der Enden aus topologisch verschiedenen Streugraphen auch topologisch verschiedene Selbstenergiegraphen entstehen, so können die Austauschgraphen dadurch berücksichtigt werden, daß man dem Graphen n-ter Ordnung in der Reihe (2.6) einen Faktor 2^n zuordnet, da er n Wechselwirkungslinien enthält, von denen jede einen Faktor 2 beiträgt.
Für die 2. Ordnung ist dies aber nicht richtig, wie wir für die topologisch verschiedenen Streugraphen 2. Ordnung in der Reihe (2.9) zeigen werden.





Die durch Schließen entstandenen Selbstenergiegraphen, die unter den ursprünglichen Streugraphen stehen, sind paarweise gleich. In höheren Näherungen tritt dies nicht mehr auf, wie man sich leicht überzeugen kann.

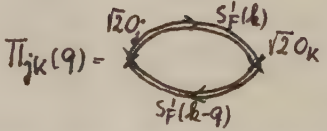
Unter Berücksichtigung dieser Ausnahme für n=2, können wir unsere Näherung in enger Analogie zu den Gleichungen (2.1), (2.3) und (2.4) wie folgt formulieren:



(2.10)

$$D_{il}(q) = \delta_{il} + \delta_{ij}\,\Pi_{jk}(q)\,D_{kl}(q) - \tfrac{1}{2}\,\delta_{ij}\,\Pi_{jk}(q)\,\delta_{kl} \qquad (2.11)$$

Dabei gilt:



(2.12)

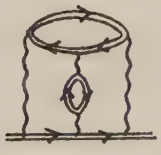
Der letzte Term in (2.11) berücksichtigt die oben diskutierte Abweichung von der Regel.

$\Sigma(p)$ in (2.6) berücksichtigt für jede Ordnung n einen Graphen, $\Sigma(p)$ in (2.10) dagegen für Ordnungen $n \neq 2$ 2^n Graphen, für n=2 nur zwei. Die Gleichungen sind dadurch nicht komplizierter geworden wegen der Fierzinvarianz des Wechselwirkungsoperators. Obwohl in (2.10) explizit keine Vertexkorrekturen erscheinen, berücksichtigt dieser Ansatz über die Austauschgraphen auch Vertexkorrekturen. Durch die Fierzinvarianz wird die strenge Trennung verwischt.

Die Beschränkung auf Teilchen-Loch-Streuung in (2.7) zeigt an, daß in unserer Näherung alle Selbstenergiegraphen fehlen, die mit der Teilchen-Teilchen-Streuung zusammenhängen. In 3. Ordnung sind das folgende Graphen:

Außerdem sind in (2.7) z.B. keine Leitergraphen enthalten, deren "Sprossen" selbst Ketten sind, also Graphen von folgendem Typ:

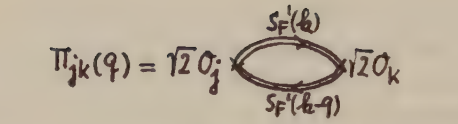
Daher bleibt in 4. Ordnung z.B. folgender Selbstenergiegraph samt seiner Austauschgraphen unberücksichtigt:



2.2 Auflösung der Matrixgleichung für die effektive Wechselwirkung D_{il}.

Wir führen die Lösung der Matrixgleichung (2.11) mit Hilfe der Lorentzinvarianz auf die Lösung von Gleichungen für skalare Größen zurück.

Zunächst untersuchen wir die Struktur der Matrix $\Pi_{jk}(q)$:



(2.12)

$$\Pi_{jk}(q) = (-2ig)(-1)\cdot 2\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} F(k^2) \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} F(k'^2)\, \mathrm{Spur}\left(iS_F'(k)\, O_j\, iS_F'(k-q)\, O_k\right) \delta^4(k-k'-q)$$

$$= -4ig \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} F(k^2) F((k-q)^2)\, \mathrm{Spur}\left(S_F'(k)\, O_j\, S_F'(k-q)\, O_k\right) \qquad (2.13)$$

Dabei setzen wir für S_F' nach (1.19) die LKD ein:

$$S_F'(k_i) = \int_0^\infty dm_i^2 \, \frac{\rho_1(m_i^2)\, \not{k}_i + \rho_2(m_i^2)}{(k_i^2 - m_i^2 + i\varepsilon)} \qquad (2.14)$$

Die Matrixstruktur von $\Pi_{jk}(q)$ ist bestimmt durch die Spur.

$$T_{jk} := \mathrm{Spur}\left(S_F'(k)\, O_j\, S_F'(k-q)\, O_k\right) \cdot (k^2 - m_1^2)((k-q)^2 - m_2^2) \qquad (2.15)$$

Hier setzen wir für O_j, O_k der Reihe nach die Matrizen aus (2.2) ein, wobei j,k = S,V,P,A .

$$\overset{SS}{T} = -2\rho_1(m_1^2)\rho_1(m_2^2)\, k\cdot(k-q) - 2\rho_2(m_1^2)\rho_2(m_2^2)$$

$$\overset{PP}{T} = -2\rho_1(m_1^2)\rho_1(m_2^2)\, k\cdot(k-q) + 2\rho_2(m_1^2)\rho_2(m_2^2)$$

$$\overset{VV}{T}_{\mu\nu} = -\left(k_\mu(k-q)_\nu + k_\nu(k-q)_\mu - g_{\mu\nu}\, k\cdot(k-q)\right)\rho_1(m_1^2)\rho_1(m_2^2)$$
$$- g_{\mu\nu}\rho_2(m_1^2)\rho_2(m_2^2)$$

$$\overset{AA}{T}_{\mu\nu} = -3\left(k_\mu(k-q)_\nu + k_\nu(k-q)_\mu - g_{\mu\nu}\, k\cdot(k-q)\right)\rho_1(m_1^2)\rho_1(m_2^2) \qquad (2.16)$$
$$+ 3 g_{\mu\nu}\rho_2(m_1^2)\rho_2(m_2^2)$$

$$\overset{SV}{T}_\mu = \overset{VS}{T}_\mu = -\sqrt{2}\,\rho_1(m_1^2)\rho_2(m_2^2)\, k_\mu - \sqrt{2}\,\rho_2(m_1^2)\rho_1(m_2^2)(k-q)_\mu$$

$$\overset{PA}{T}_\mu = -\overset{AP}{T}_\mu = -i\sqrt{6}\,\rho_1(m_1^2)\rho_2(m_2^2)\, k_\mu + i\sqrt{6}\,\rho_2(m_1^2)\rho_1(m_2^2)(k-q)_\mu$$

$$\overset{AV}{T}_{\mu\nu} = -i\sqrt{3}\,\varepsilon_{\alpha\nu\beta\mu}\, k^\alpha (k-q)^\beta \rho_1(m_1^2)\rho_1(m_2^2)$$

Die restlichen Spuren verschwinden.

Das Integral (2.13) ist invariant gegen folgende zugleich ausgeführten Vertauschungen:

$$(k\ ;\ q-k\ ;\ m_1^2\ ;\ m_2^2) \rightarrow (q-k\ ;\ k\ ;\ m_2^2\ ;\ m_1^2) \tag{2.17}$$

Bei der Integration verschwinden alle $\Pi_{jk}(q)$, bei denen der Spurterm T_{jk} im Integranden antisymmetrisch ist bei den Vertauschungen (2.17).

$$\Pi_{jk} = -4ig \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} F(k^2) F((k-q)^2) \int_0^\infty dm_1^2 \int_0^\infty dm_2^2 \frac{T_{jk}}{(k^2-m_1^2+i\varepsilon)((k-q)^2-m_2^2+i\varepsilon)} \tag{2.18}$$

Mit (2.16) folgt daraus: $\overset{SV}{\Pi}_\mu(q) = \overset{VS}{\Pi}_\mu(q) = 0$, $\overset{AV}{\Pi}_{\mu\nu}(q) = 0$

Π_{jk} kann auf folgende Form reduziert werden:

$$\Pi_{jk} = \begin{pmatrix} \overset{SS}{\Pi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \overset{VV}{\Pi}_{\mu\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overset{PP}{\Pi} & \overset{PA}{\Pi}_\nu \\ 0 & 0 & \overset{AP}{\Pi}_\mu & \overset{AA}{\Pi}_{\mu\nu} \end{pmatrix}, \quad \overset{AP}{\Pi}_\mu = -\overset{PA}{\Pi}_\mu \tag{2.19}$$

Wir kehren zurück zur Gleichung (2.11).

$$D_{il} = \delta_{il} + \delta_{ij}\Pi_{jk}D_{kl} - \frac{1}{2}\delta_{ij}\Pi_{jk}\delta_{kl}$$

Zunächst sieht man leicht, daß die Matrix D_{il} dieselbe Struktur hat wie Π_{jk}. Für die nicht verschwindenden Matrixelemente ergeben sich zum Teil gekoppelte Gleichungen.

$$\begin{aligned}
\overset{SS}{D} &= 1 + \overset{SS}{\Pi}\overset{SS}{D} - \frac{1}{2}\overset{SS}{\Pi} \\
\overset{VV}{D}_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} + g_{\mu\rho}\overset{VV}{\Pi}_{\rho\sigma}\overset{VV}{D}_{\sigma\nu} - \frac{1}{2}\overset{VV}{\Pi}_{\mu\nu} \\
\overset{PP}{D} &= 1 + \overset{PP}{\Pi}\overset{PP}{D} + \overset{PA}{\Pi}_\sigma\overset{AP}{D}_\sigma - \frac{1}{2}\overset{PP}{\Pi} \\
\overset{AA}{D}_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} + g_{\mu\rho}\overset{AA}{\Pi}_{\rho\sigma}\overset{AA}{D}_{\sigma\nu} + \overset{AP}{\Pi}_\mu\overset{PA}{D}_\nu - \frac{1}{2}\overset{AA}{\Pi}_{\mu\nu} \\
\overset{PA}{D}_\nu &= \overset{PA}{\Pi}_\sigma\overset{AA}{D}_{\sigma\nu} + \overset{PP}{\Pi}\overset{PA}{D}_\nu - \frac{1}{2}\overset{PA}{\Pi}_\nu \\
\overset{AP}{D}_\mu &= g_{\mu\rho}\overset{AA}{\Pi}_{\rho\sigma}\overset{AP}{D}_\sigma + \overset{AP}{\Pi}_\mu\overset{PP}{D} - \frac{1}{2}\overset{AP}{\Pi}_\mu
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Die Auflösung dieses Systems gelingt, wenn wir mit Hilfe der Lorentzinvarianz Ansätze machen für die Tensoren $\overset{VV}{\Pi}{}^{\rho\sigma}$, $\overset{AA}{\Pi}{}^{\rho\sigma}$ bzw. $\overset{VV}{D}_{\mu\nu}$, $\overset{AA}{D}_{\mu\nu}$, sowie für die Vektoren $\overset{AP}{\Pi}{}^{\rho}$, $\overset{PA}{\Pi}{}^{\sigma}$; $\overset{AP}{D}_{\mu}$, $\overset{PA}{D}_{\nu}$.

Def.:
$$\begin{aligned}
\overset{VV}{\Pi}{}^{\rho\sigma}(q) &= \overset{V}{f}_1(q^2) g^{\rho\sigma} + \overset{V}{f}_2(q^2) \frac{q^\rho q^\sigma}{q^2} \\
\overset{AA}{\Pi}{}^{\rho\sigma}(q) &= \overset{A}{f}_1(q^2) g^{\rho\sigma} + \overset{A}{f}_2(q^2) \frac{q^\rho q^\sigma}{q^2} \\
\overset{PA}{\Pi}{}^{\rho}(q) &= -\overset{AP}{\Pi}{}^{\rho}(q) = \varphi(q^2) q^\rho
\end{aligned} \qquad (2.21)$$

Def.:
$$\begin{aligned}
\overset{VV}{D}_{\mu\nu}(q) &= \overset{V}{F}_1(q^2) g_{\mu\nu} + \overset{V}{F}_2(q^2) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \\
\overset{AA}{D}_{\mu\nu}(q) &= \overset{A}{F}_1(q^2) g_{\mu\nu} + \overset{A}{F}_2(q^2) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \\
\overset{PA}{D}_{\mu} &= \phi_1(q^2) q_\mu \quad , \quad \overset{AP}{D}_{\nu}(q) = \phi_2(q^2) q_\nu
\end{aligned} \qquad (2.22)$$

Wir drücken nun alle Funktionen, die $D_{il}(q)$ definieren, durch solche aus, die aus $\Pi_{jk}(q)$ folgen, wenn wir die Integrale in (2.18) berechnet haben:

$$\begin{aligned}
\overset{SS}{D} &= \frac{1-\frac{1}{2}\overset{SS}{\Pi}}{1-\overset{SS}{\Pi}} \; ; \; \overset{PP}{D} = \frac{1-\frac{1}{2}\overset{PP}{\Pi}}{1-\overset{PP}{\Pi}} - \frac{1}{2}\frac{q^2\varphi^2}{(1-\overset{PP}{\Pi})^2} \cdot \frac{1}{\left(1-\overset{A}{f}_1-\overset{A}{f}_2+\frac{q^2\varphi^2}{1-\overset{PP}{\Pi}}\right)} \\
\overset{V}{F}_1 &= \frac{1-\frac{1}{2}\overset{V}{f}_1}{1-\overset{V}{f}_1} \; ; \; \overset{V}{F}_2 = \frac{1}{2} \; \frac{\overset{V}{f}_2}{(1-\overset{V}{f}_1)(1-\overset{V}{f}_1-\overset{V}{f}_2)} \\
\overset{A}{F}_1 &= \frac{1-\frac{1}{2}\overset{A}{f}_1}{1-\overset{A}{f}_1} \; ; \; \overset{A}{F}_2 = \frac{1}{2} \; \frac{\left(\overset{A}{f}_2 - \frac{q^2\varphi^2}{1-\overset{PP}{\Pi}}\right)}{(1-\overset{A}{f}_1)\left(1-\overset{A}{f}_1-\overset{A}{f}_2+\frac{q^2\varphi^2}{1-\overset{PP}{\Pi}}\right)} \\
\phi_1 &= -\phi_2 = \frac{1}{2} \; \frac{\varphi}{(1-\overset{PP}{\Pi})\left(1-\overset{A}{f}_1-\overset{A}{f}_2+\frac{q^2\varphi^2}{1-\overset{PP}{\Pi}}\right)}
\end{aligned} \qquad (2.23)$$

Bei diesen Funktionen interessieren uns besonders die Pole und das asymptotische Verhalten für $q^2 \to \infty$. Die Lage der Pole gibt uns die Massen von Bindungszuständen an, das asymptotische Verhalten ist wichtig, wenn wir später zur Berechnung von $\Sigma(p)$ für die $D_{il}(q)$ Spektraldarstellungen angeben werden.

2.3 Berechnung der Vakuumpolarisation Π_{jk} .

In (2.18) wird nun die Impulsintegration ausgeführt.

$$\Pi_{jk}(q) = -4ig \int_0^\infty\!\!\int dm_1^2\, dm_2^2 \left\{ \frac{d^4k}{(2\pi)^4} F(k^2) F((k-q)^2) \frac{T_{jk}}{(k^2-m_1^2+i\varepsilon)((k-q)^2-m_2^2+i\varepsilon)} \right.$$

Weil hier zwei innere Fermionlinien auftreten, im Gegensatz zur Selbstenergie $\Sigma^1(p)$, erhält man Konvergenz schon mit n=1 für $F_n(k^2)$ aus (1.24). Wir verwenden daher

$$F(k_i^2) = \frac{-\Delta^2}{k_i^2 - \Delta^2 + i\varepsilon} \quad . \tag{2.24}$$

Die Abhängigkeit der T_{jk} in (2.16) von der Integrationsvariablen k läßt sich auf drei Kombinationen zurückführen.

$$T_{jk} \sim [1\,;\, k_\mu (k-q)_\nu \,;\, k_\mu]$$

Wir müssen also drei verschiedene Integrale berechnen:

$$\underline{I} := (I_1; I_2; I_3) := \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\Delta^4 [1\,;\, k_\mu (k-q)_\nu \,;\, k_\mu]}{(k^2-m_1^2+i\varepsilon)((k-q)^2-m_2^2+i\varepsilon)(k^2-\Delta^2+i\varepsilon)((k-q)^2-\Delta^2+i\varepsilon)} \tag{2.25}$$

Mit Hilfe von $\frac{1}{x+i\varepsilon} = i \int_0^\infty d\alpha\, e^{i\alpha(x+i\varepsilon)}$ bringen wir die Nenner in den Exponenten und ergänzen dort quadratisch:

$$\underline{I} = \Delta^4 \int_0^\infty\!\!\int\!\!\int\!\!\int \frac{d\alpha_1\, d\alpha_2}{d\beta_1\, d\beta_2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} [1\,;\, k_\mu (k-q)_\nu \,;\, k_\mu] \otimes$$

$$\otimes \exp\left[i\alpha_1 (k^2 - m_1^2 + i\varepsilon) + i\beta_1 ((k-q)^2 - m_2^2 + i\varepsilon) + i\alpha_2 (k^2 - \Delta^2 + i\varepsilon) + i\beta_2 ((k-q)^2 - \Delta^2 + i\varepsilon) \right]$$

$$= \Delta^4 \int_0^\infty\!\!\int\!\!\int\!\!\int \frac{d\alpha_1\, d\alpha_2}{d\beta_1\, d\beta_2} \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \left[1\,;\, (k'_\mu k'_\nu - \frac{AB}{(A+B)^2} q_\mu q_\nu + \frac{B}{(A+B)} q_\mu k'_\nu - \frac{A}{(A+B)} q_\nu k'_\mu)\,;\, (k'_\mu + \frac{B}{A+B} q_\mu) \right] \otimes$$

$$\otimes \exp\left[i(A+B) k'^2 + i \frac{AB}{A+B} q^2 - i\alpha_1 (m_1^2 - i\varepsilon) - i\beta_1 (m_2^2 - i\varepsilon) - i(\alpha_2 + \beta_2) \Delta^2 \right]$$

Dabei sind folgende Abkürzungen eingeführt worden:

$$A := (\alpha_1+\alpha_2) \quad , \quad B := (\beta_1+\beta_2)$$

Nun kann man die k'-Integration nach einer Wickrotation ausführen.

$$\underline{\underline{I}} = \frac{\Delta^4}{16\pi^2 i} \int_0^\infty \frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{d\beta_1 d\beta_2} \left[\frac{1}{(A+B)^2} ; \left(\frac{i g_{\mu\nu}}{2(A+B)^3} - \frac{AB\, q_\mu q_\nu}{(A+B)^4} \right) ; \frac{B}{(A+B)^3} q_\mu \right] \otimes$$

$$\otimes \exp\left[i \frac{AB}{(A+B)} q^2 - i\alpha_1 (m_1^2 - i\varepsilon) - i\beta_1 (m_2^2 - i\varepsilon) - i(\alpha_2+\beta_2)\Delta^2 \right]$$

Mit der Identität $\int_0^\infty d\lambda\, \delta(A+B-\lambda) = 1$ kann man das Integral so vereinfachen, daß drei Parameterintegrationen ausgeführt werden können.

$$\underline{\underline{I}} = \frac{\Delta^4}{16\pi^2 i} \int_0^\infty \frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{d\beta_1 d\beta_2} \int_0^\infty d\lambda\, \delta(A+B-1) \left[\lambda ; \left(\frac{i}{2} g_{\mu\nu} - \lambda AB\, q_\mu q_\nu \right) ; \lambda B q_\mu \right] \otimes$$

$$\otimes \exp\left[i\lambda AB q^2 - i\lambda\alpha_1 (m_1^2 - i\varepsilon) - i\lambda\beta_1 (m_2^2 - i\varepsilon) - i\lambda(\alpha_2+\beta_2)\Delta^2 \right]$$

$$= \frac{\Delta^2}{16\pi^2 i} \int_0^1 dB \int_0^\infty d\lambda \left[\frac{\lambda}{\Delta^2} ; \left(\frac{i}{2} g_{\mu\nu} + i q_\mu q_\nu \frac{d}{dq^2} \right) ; \frac{\lambda B}{\Delta^2} q_\mu \right] \otimes \qquad (2.26)$$

$$\otimes \exp\left[i\lambda(1-B) B \frac{q^2}{\Delta^2} - i\lambda(1-i\varepsilon) \right] \left[\frac{e^{\frac{i\lambda(1-B)\left(\frac{\Delta^2-m_1^2}{\Delta^2}\right)}{}} - 1}{i\lambda\left(\frac{\Delta^2-m_1^2}{\Delta^2}\right)} \right] \left[\frac{e^{i\lambda B\left(\frac{\Delta^2-m_2^2}{\Delta^2}\right)} - 1}{i\lambda\left(\frac{\Delta^2-m_2^2}{\Delta^2}\right)} \right]$$

In dieser Form ist die quadratische Divergenz des $g_{\mu\nu}$-Terms sichtbar, q^2 kommt nur in der Kombination $\frac{q^2}{\Delta^2}$ vor. Die weiteren Integrationen von (2.26) führen wir im Anhang durch und definieren dazu:

$$\underline{\underline{I}} := \frac{\Delta^2 i}{16\pi^2} \left[-\frac{1}{\Delta^2} h_2(q^2) ; \left(\frac{1}{2} g_{\mu\nu} + q_\mu q_\nu \frac{d}{dq^2} \right) h_1(q^2) ; -\frac{1}{\Delta^2} h_3(q^2) q_\mu \right] \qquad (2.27)$$

Durch Vergleichung der berechneten Integrale (2.25) mit den Ausdrücken (2.18) für $\Pi_{jk}(q)$ in Verbindung mit den Spurtermen (2.16) erhält man:

$$\overset{ss}{\Pi}(q^2) = -\frac{q\Delta^2}{2\pi^2} \int_0^\infty dm_1^2 dm_2^2 \left[\rho_1(m_1^2)\rho_1(m_2^2)\left(2 + q^2 \frac{d}{dq^2}\right) h_1(q^2) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\Delta^2} \rho_2(m_1^2)\rho_2(m_2^2)\, h_2(q^2) \right] \qquad (2.28)_1$$

$$\overset{PP}{\Pi}(q^2) = -\frac{g\Delta^2}{2\pi^2}\iint_0^\infty d\mu_1^2 d\mu_2^2 \left[\rho_1(\mu_1^2)\rho_1(\mu_2^2)\left(2+q^2\frac{d}{dq^2}\right)h_1(q^2) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\Delta^2}\rho_2(\mu_1^2)\rho_2(\mu_2^2)h_2(q^2)\right]$$

$$\overset{PA}{\Pi}_\nu(q) = -\overset{AP}{\Pi}_\nu(q) = \frac{1}{2}\sqrt{6}\,i\,\frac{g\Delta^2}{\pi^2}\iint_0^\infty d\mu_1^2 d\mu_2^2\,\rho_1(\mu_1^2)\rho_2(\mu_2^2)\frac{1}{\Delta^2}h_3(q^2)q_\nu$$

$$\overset{W}{\Pi}_{\mu\nu}(q) = -\frac{g\Delta^2}{4\pi^2}\iint_0^\infty d\mu_1^2 d\mu_2^2\left[\rho_1(\mu_1^2)\rho_1(\mu_2^2)\left(-g_{\mu\nu}-g_{\mu\nu}q^2\frac{d}{dq^2}+2q_\mu q_\nu\frac{d}{dq^2}\right)h_1(q^2)\right.$$
$$\left. - g_{\mu\nu}\frac{1}{\Delta^2}\rho_2(\mu_1^2)\rho_2(\mu_2^2)h_2(q^2)\right] \qquad (2.28)_2$$

$$\overset{AA}{\Pi}_{\mu\nu}(q) = -\frac{3g\Delta^2}{4\pi^2}\iint_0^\infty d\mu_1^2 d\mu_2^2\left[\rho_1(\mu_1^2)\rho_1(\mu_2^2)\left(-g_{\mu\nu}-g_{\mu\nu}q^2\frac{d}{dq^2}+2q_\mu q_\nu\frac{d}{dq^2}\right)h_1(q^2)\right.$$
$$\left. + g_{\mu\nu}\frac{1}{\Delta^2}\rho_2(\mu_1^2)\rho_2(\mu_2^2)h_2(q^2)\right]$$

Aus $\overset{VV}{\Pi}_{\mu\nu}$, $\overset{AA}{\Pi}_{\mu\nu}$ und $\overset{PA}{\Pi}_\nu$ lesen wir die in (2.21) definierten skalaren Funktionen $\overset{V}{f}_1, \overset{V}{f}_2, \overset{A}{f}_1, \overset{A}{f}_2, \varphi$ ab.

$$\overset{V}{f}_1(q^2) = \frac{g\Delta^2}{4\pi^2}\iint_0^\infty d\mu_1^2 d\mu_2^2\left[\rho_1(\mu_1^2)\rho_1(\mu_2^2)\left(1+q^2\frac{d}{dq^2}\right)h_1(q^2)\right.$$
$$\left. + \rho_2(\mu_1^2)\rho_2(\mu_2^2)\frac{1}{\Delta^2}h_2(q^2)\right]$$

$$\overset{V}{f}_2(q^2) = -\frac{g\Delta^2}{2\pi^2}\iint_0^\infty d\mu_1^2 d\mu_2^2\,\rho_1(\mu_1^2)\rho_1(\mu_2^2)\,q^2\frac{d}{dq^2}h_1(q^2)$$

$$\overset{A}{f}_1(q^2) = 3\frac{g\Delta^2}{4\pi^2}\iint_0^\infty d\mu_1^2 d\mu_2^2\left[\rho_1(\mu_1^2)\rho_1(\mu_2^2)\left(1+q^2\frac{d}{dq^2}\right)h_1(q^2)\right. \qquad (2.29)$$
$$\left. - \rho_2(\mu_1^2)\rho_2(\mu_2^2)\frac{1}{\Delta^2}h_2(q^2)\right]$$

$$\overset{A}{f}_2(q^2) = -3\frac{g\Delta^2}{2\pi^2}\iint_0^\infty d\mu_1^2 d\mu_2^2\,\rho_1(\mu_1^2)\rho_1(\mu_2^2)\,q^2\frac{d}{dq^2}h_1(q^2)$$

$$\varphi(q^2) = \sqrt{6}\,i\,\frac{g\Delta^2}{2\pi^2}\iint_0^\infty d\mu_1^2 d\mu_2^2\,\rho_1(\mu_1^2)\rho_2(\mu_2^2)\frac{1}{\Delta^2}h_3(q^2)$$

Wir können damit alle $\Pi_{jk}(q)$ mit den drei Funktionen $h_i(q^2)$ darstellen, die im Anhang berechnet werden.

Bevor wir das Ergebnis der Integration angeben, definieren wir:

$$D(m_i^2, m_j^2, q^2) := [q^4 - (m_i^2 - m_j^2)^2 + 2q^2(m_i^2 + m_j^2)] \tag{2.30}$$

$$Y(m_i^2, m_j^2, q^2) := \begin{cases} \sqrt{-D}\, \ln \dfrac{m_i^2 + m_j^2 - q^2 + \sqrt{-D}}{m_i^2 + m_j^2 - q^2 - \sqrt{-D}} & \text{für } D<0 \text{ und } q^2 < (m_i - m_j)^2 \\ -2\sqrt{D}\, \operatorname{arctg} \dfrac{q^2 - m_i^2 + m_j^2}{\sqrt{D}} + 2\sqrt{D}\, \operatorname{arctg} \dfrac{-q^2 - m_i^2 + m_j^2}{\sqrt{D}} & \text{für } D>0 \\ \sqrt{-D}\, \ln \dfrac{m_i^2 + m_j^2 - q^2 + \sqrt{-D}}{m_i^2 + m_j^2 - q^2 - \sqrt{-D}} + 2\pi i \sqrt{-D} & \text{für } D<0 \text{ und } q^2 > (m_i + m_j)^2 \end{cases} \tag{2.31}$$

$$n(i,j) := \frac{m_i - m_1}{\Delta - m_1} + \frac{m_j - m_2}{\Delta - m_2} = \begin{cases} 0 & \text{für } m_i = m_1,\ m_j = m_2 \\ 1 & \text{für } m_i = m_1,\ m_j = \Delta \\ & \quad\ m_i = \Delta,\ m_j = m_2 \\ 2 & \text{für } m_i = \Delta,\ m_j = \Delta \end{cases} \tag{2.32}$$

$$h_1(q^2) = \left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2 - m_1^2}\right)\left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2 - m_2^2}\right) \otimes$$

$$\otimes \sum_{\substack{m_i = m_1, \Delta \\ m_j = m_2, \Delta}} (-1)^{n(i,j)} \left\{ \frac{1}{12q^4\Delta^2} D(m_i^2, m_j^2, q^2) Y(m_i^2, m_j^2, q^2) + \frac{(m_i^2 - m_j^2)^2}{4\Delta^2} \ln \frac{m_i^2}{m_j^2} \right.$$

$$\left. + \frac{(m_i^2 - m_j^2)^3}{12q^4\Delta^2} \ln \frac{m_i^2}{m_j^2} - \frac{(m_i^4 - m_j^4)}{4q^2\Delta^2} \ln \frac{m_i^2}{m_j^2} - \frac{(m_i^2 - m_j^2)^2}{6q^2\Delta^2} \right\}$$

$$= \left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2 - m_1^2}\right)\left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2 - m_2^2}\right) \otimes \tag{2.33}$$

$$\otimes \sum_{\substack{m_i = m_1, \Delta \\ m_j = m_2, \Delta}} (-1)^{n(i,j)} \left\{ \frac{1}{12q^4\Delta^2} D(m_i^2, m_j^2, q^2) Y(m_i^2, m_j^2, q^2) + \frac{(m_i^2 - m_j^2)^2}{4\Delta^2} \ln \frac{m_i^2}{m_j^2} \right.$$

$$- \frac{1}{12q^4\Delta^2} D(m_i^2, m_j^2, 0) Y(m_i^2, m_j^2, 0)$$

$$\left. - \frac{1}{12q^2\Delta^2} \left(\frac{d}{dq^2} D(m_i^2, m_j^2, q^2) Y(m_i^2, m_j^2, q^2) \right)_{q^2=0} \right\}$$

$$h_2(q^2) = \left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2 - m_1^2}\right)\left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2 - m_2^2}\right) \otimes$$

$$\otimes \sum_{\substack{m_i = m_1, \Delta \\ m_j = m_2, \Delta}} (-1)^{n(i,j)} \left\{ -\frac{1}{2q^2} Y(m_i^2, m_j^2, q^2) + \frac{1}{2q^2} Y(m_i^2, m_j^2, 0) \right\} \quad (2.34)$$

$$h_3(q^2) = \left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2 - m_1^2}\right)\left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2 - m_2^2}\right) \otimes \quad (2.35)$$

$$\otimes \sum_{\substack{m_i = m_1, \Delta \\ m_j = m_2, \Delta}} (-1)^{n(i,j)} \left\{ \frac{(-m_i^2 + m_j^2 - q^2)}{4q^4} Y(m_i^2, m_j^2, q^2) + \frac{(m_i^2 - m_j^2)}{4q^4} Y(m_i^2, m_j^2, 0) \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4q^2} \left(\frac{d}{dq^2} (-m_i^2 + m_j^2 - q^2) Y(m_i^2, m_j^2, q^2) \right)_{q^2 = 0} \right\}$$

Die Funktion $Y(m_i^2, m_j^2, q^2)$ gibt das Schwellenverhalten der $h_i(q^2)$ wieder, für $q^2 > (m_i + m_j)^2$ wird Y komplex, wie man an der Definition in (2.31) sieht. Jede Funktion hat vier Schwellen, die physikalische bei $q^2 = (m_1 + m_2)^2$, dazu kommen noch die Schwellen bei $q^2 = (m_1 + \Delta)^2$, $q^2 = (\Delta + m_2)^2$, $q^2 = 4\Delta^2$, die durch die Abschneidung hereinkommen.
Wir haben die $h_i(q^2)$ in einer Form dargestellt, die sichtbar werden läßt, daß bei $q^2 = o$ keine Pole vorliegen.

2.4 Selbstkonsistenzgleichung aus dem Goldstone-Theorem.

In den Gleichungen (2.28) für $\Pi_{jk}(q)$ treten noch die Dichtefunktionen $\rho_1(m_i^2), \rho_2(m_i^2)$ auf. Bei der Berechnung der Massenmatrix $\Sigma(p)$ mit Gleichung (2.10) kommen die Dichten sowohl im Fermionpropagator $S_F'(p-q)$ als auch in der effektiven Wechselwirkung $D_{il}(q)$ vor. Die Dysongleichung (1.8) liefert also nichtlineare Integralgleichungen für die Dichten ρ_1 und ρ_2. Die Aufgabe, diese Integralgleichung aufzustellen und zu lösen, erwies sich als zu schwierig. Wir verzichten daher im weiteren auf die Selbstkonsistenz und begnügen uns mit der störungstheoretischen Berechnung von $\Sigma(p)$.

Zuvor aber können wir aus unseren vorliegenden Resultaten, die ohne diese Vereinfachung gewonnen wurden, eine Selbst-

konsistenzgleichung ableiten. Dazu setzen wir voraus, daß das ursprüngliche Programm zu einer nicht verschwindenden Fermionenmasse führt, wenn im Grundzustand die Touschek-Invarianz gebrochen ist. Aus dem Goldstonetheorem [19] folgt dann die Existenz eines pseudoskalaren Bosons der Masse o. Das bedeutet, daß $D^{PP}(q^2)$ bei $q^2 = o$ einen Pol haben muß. Wir leiten nun ab, unter welcher Bedingung dieser Pol auftritt.

$D^{PP}(q^2)$ wurde in (2.23) angegeben:

$$\overset{PP}{D}(q^2) = \frac{1-\frac{1}{2}\overset{PP}{\Pi}(q^2)}{1-\overset{PP}{\Pi}(q^2)} - \frac{1}{2}\,\frac{q^2\varphi^2(q^2)}{(1-\overset{PP}{\Pi}(q^2))^2\left(1-\overset{D}{f_1}(q^2)-\overset{D}{f_2}(q^2)+\frac{q^2\varphi^2(q^2)}{1-\overset{PP}{\Pi}(q^2)}\right)} \tag{2.36}$$

Für $q^2 \to o$ soll gelten: $\overset{PP}{D}(q^2) \longrightarrow \frac{\alpha}{q^2+i\epsilon}$

Das ist möglich, falls $\overset{PP}{\Pi}(q^2) = 1$ für $q^2 = o$. (2.37)

$\overset{PP}{\Pi}(q^2)$ entnehmen wir aus (2.28) und erhalten:

$$1 = -\frac{g\Delta^2}{2\pi^2}\int_0^\infty dm_1^2 dm_2^2 \left\{ \rho_1(m_1^2)\rho_1(m_2^2)\left(2+q^2\frac{d}{dq^2}\right)h_1(q^2) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\Delta^2}\rho_2(m_1^2)\rho_1(m_2^2)h_2(q^2) \right\} \tag{2.38}$$

Die Funktionen $\left(2+q^2\frac{d}{dq^2}\right)h_1(q^2)$ und $h_2(q^2)$ entnehmen wir (2.33) bzw. (2.34) und entwickeln sie um $q^2 = o$.

$$2h_1(q^2) + q^2\frac{d}{dq^2}h_1(q^2) =$$
$$= \left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m_1^2}\right)\left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m_2^2}\right)\sum_{\substack{m_i=m_{1,}\Delta \\ m_j=m_{2,}\Delta}} (-1)^{n(i,j)}\left\{\frac{(m_i^2-m_j^2)}{4\Delta^2}\ln\frac{m_i^2}{m_j^2} - \frac{1}{4}\frac{(m_i^2+m_j^2)^2}{\Delta^2(m_i^2-m_j^2)}\ln\frac{m_i^2}{m_j^2}\right.$$
$$+\frac{3}{8}\frac{q^2}{\Delta^2}\frac{(m_i^2+m_j^2)}{(m_i^2-m_j^2)}\ln\frac{m_i^2}{m_j^2} + \frac{1}{4}\frac{q^2}{\Delta^2}\frac{(m_i^2+m_j^2)^2}{(m_i^2-m_j^2)^2}$$
$$\left. -\frac{1}{8}\frac{q^2}{\Delta^2}\frac{(m_i^2+m_j^2)^3}{(m_i^2-m_j^2)^3}\ln\frac{m_i^2}{m_j^2} + O(q^4)\right\} \tag{2.39}$$

$$h_2(q^2) = \left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m_1^2}\right)\left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m_2^2}\right)\sum_{\substack{m_i=m_{1,}\Delta \\ m_j=m_{2,}\Delta}} (-1)^{n(i,j)}\left\{\frac{1}{2}\frac{(m_i^2+m_j^2)}{(m_i^2-m_j^2)}\ln\frac{m_i^2}{m_j^2} + \frac{1}{4}\frac{q^2(m_i^2+m_j^2)^2}{(m_i^2-m_j^2)^3}\ln\frac{m_i^2}{m_j^2}\right.$$
$$\left. -\frac{1}{4}\frac{q^2}{(m_i^2-m_j^2)}\ln\frac{m_i^2}{m_j^2} - \frac{1}{2}\frac{q^2(m_i^2+m_j^2)}{(m_i^2-m_j^2)^2} + O(q^4)\right. \tag{2.40}$$

Aus (2.38) erhält man damit folgende Selbstkonsistenzgleichung:

$$1 = \frac{g\Delta^2}{2\pi^2} \int_0^\infty dm_1^2 dm_2^2 \left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2 - m_1^2}\right)\left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2 - m_2^2}\right) \otimes$$

$$\otimes \Big\{ \rho_1(m_1^2)\rho_1(m_2^2) \sum_{\substack{m_i = m_{1,\Delta} \\ m_j = m_{2,\Delta}}} (-1)^{n(i,j)} \left(-\frac{(m_i^2 - m_j^2)}{4\Delta^2} \ln \frac{m_i^2}{m_j^2} + \frac{1}{4\Delta^2} \frac{(m_i^2 + m_j^2)^2}{(m_i^2 - m_j^2)} \ln \frac{m_i^2}{m_j^2} \right) \tag{2.41}$$

$$- \frac{1}{\Delta^2} \rho_2(m_1^2)\rho_2(m_2^2) \sum_{\substack{m_i = m_{1,\Delta} \\ m_j = m_{2,\Delta}}} (-1)^{n(i,j)} \frac{1}{2} \frac{(m_i^2 + m_j^2)}{(m_i^2 - m_j^2)} \ln \frac{m_i^2}{m_j^2} \Big\}$$

Der Integrand hat trotz der auftretenden Faktoren $\left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2 - m_1^2}\right), \left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2 - m_2^2}\right)$ für $m_1^2 = \Delta^2$ und $m_2^2 = \Delta^2$ keine Pole.

In Gleichung (2.41) treten noch die Dichtefunktionen ρ_1, ρ_2 auf, von denen wir nur allgemeine Eigenschaften aus der Ableitung der LKD kennen:

$$\rho_1(M^2) \geq 0\,, \quad M\rho_1(M^2) - \rho_2(M^2) \geq 0\,, \quad \int_0^\infty dM^2 \rho_1(M^2) = 1$$

Die abgeleitete Selbstkonsistenzgleichung erhält aber Bedeutung, wenn man aus störungstheoretischen Berechnungen gewisse Informationen über den Verlauf der Dichten gewonnen hat. Man erhält dann eine neue Relation zwischen der Kopplungskonstanten g, der Abschneidekonstante Δ und der Einteilchenmasse.

Daß (2.41) mit Recht als Selbstkonsistenzgleichung gelten kann, wird deutlich, wenn wir darin den Übergang zur HF-Näherung machen, wo $\rho_1(m_i^2) = \delta(m_i^2 - m^2)$, $\rho_2(m_i^2) = m\,\delta(m_i^2 - m^2)$ gilt. Man gewinnt dann die Selbstkonsistenzgleichung (1.29) der HF-Näherung mit $m = m_{HF}$ zurück.

2.5 Diskussion der effektiven Wechselwirkung für den Fall der Störungsrechnung.

Wir kehren zurück zu den Gleichungen (2.23) für $D_{il}(q)$ und untersuchen deren Polstruktur und das asymptotische Verhalten. Es sei $\rho_1(m_i^2) = \delta(m_i^2 - m^2)$, $\rho_2(m_i^2) = m\,\delta(m_i^2 - m^2)$ mit $m = m_{HF}$.

Dadurch vereinfachen sich in (2.28) und (2.29) die Funktionen, durch die die effektive Wechselwirkung bestimmt ist.

$$
\begin{aligned}
\overset{SS}{\Pi}(q^2) &= -\frac{g\Delta^2}{2\pi^2}\left[(2+q^2\frac{d}{dq^2})h_1(q^2) - \frac{m^2}{\Delta^2}h_2(q^2)\right] \\
\overset{PP}{\Pi}(q^2) &= -\frac{g\Delta^2}{2\pi^2}\left[(2+q^2\frac{d}{dq^2})h_1(q^2) + \frac{m^2}{\Delta^2}h_2(q^2)\right] \\
\overset{V}{f}_1(q^2) &= \frac{g\Delta^2}{4\pi^2}\left[(1+q^2\frac{d}{dq^2})h_1(q^2) + \frac{m^2}{\Delta^2}h_2(q^2)\right] \\
\overset{B}{f}_1(q^2) &= \frac{3g\Delta^2}{4\pi^2}\left[(1+q^2\frac{d}{dq^2})h_1(q^2) - \frac{m^2}{\Delta^2}h_2(q^2)\right] \\
\overset{V}{f}_2(q^2) &= -\frac{g\Delta^2}{2\pi^2}\, q^2\frac{d}{dq^2}h_1(q^2) \quad ; \quad \overset{B}{f}_2(q^2) = 3\overset{V}{f}_2(q^2) \\
\varphi(q^2) &= \sqrt{6}\, i\, \frac{g\Delta^2}{2\pi^2}\,\frac{m}{\Delta^2}h_3(q^2)
\end{aligned}
\tag{2.42}
$$

In den Ausdrücken (2.33) bis (2.35) für $h_i(q^2)$ haben wir $m_1 = m_2 = m$ zu setzen. Die Schwellenstruktur wird dadurch einfacher, es gibt nur eine physikalische Schwelle bei $q^2 = 4m^2$, sowie weitere bei $q^2 = (\Delta + m)^2$ und $q^2 = 4\Delta^2$, die von der Abschneidung herrühren. Daß nicht höhere physikalische Schwellen bei $q^2 = 16m^2$, $q^2 = 36m^2$ usw. auftreten, liegt daran, daß wir bei der Vakuumpolarisation die Erzeugung von Mehrfachpaaren nicht berücksichtigt haben.

Wir suchen Pole der $D_{il}(q)$ für $q^2 < 4m^2$ und entwickeln dazu in den Funktionen $h_i(q^2)$ die schwach von q^2 abhängigen Terme $Y(m^2, \Delta^2, q^2)$, $Y(\Delta^2, \Delta^2, q^2)$ bis zu Gliedern der Ordnung $\frac{q^2}{\Delta^2}$. Bei $Y(m^2, m^2, q^2) = -4\sqrt{q^2(4m^2-q^2)}\,\operatorname{arctg}\frac{q^2}{\sqrt{q^2(4m^2-q^2)}}$ fällt die Entwicklung verschieden aus, je nachdem, ob $q^2 \approx 0$ oder $q^2 \approx 4m^2$. Dieser Term bleibt vorerst unentwickelt. Damit ergibt sich unterhalb der ersten Schwelle für $0 \leq q^2 < 4m^2$

$$
\begin{aligned}
h_1(q^2) = \left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m^2}\right)^2\Bigg[&-\frac{1}{2} + \frac{5}{6}\frac{m^2}{\Delta^2} + \frac{m^2}{\Delta^2-m^2}\ln\frac{\Delta^2}{m^2} - \frac{1}{6}\frac{q^2}{\Delta^2} - \frac{1}{6}\frac{q^2}{\Delta^2}\ln\frac{\Delta^2}{m^2} - \\
&- \frac{1}{3}\frac{(4m^2-q^2)\sqrt{q^2(4m^2-q^2)}}{q^2\Delta^2}\operatorname{arctg}\frac{q^2}{\sqrt{q^2(4m^2-q^2)}} + O\left(\frac{q^4}{\Delta^4}\right) + O\left(\frac{m^2q^2}{\Delta^4}\right)\Bigg],
\end{aligned}
\tag{2.43}
$$

$$q^2\frac{d}{dq^2}h_1(q^2)=\left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m^2}\right)^2\Big[\frac{(2m^2+q^2)\sqrt{q^2(4m^2-q^2)}}{3q^2\Delta^2}\operatorname{arctg}\frac{q^2}{\sqrt{q^2(4m^2-q^2)}}-$$
$$-\frac{2}{3}\frac{m^2}{\Delta^2}-\frac{1}{6}\frac{q^2}{\Delta^2}\ln\frac{\Delta^2}{m^2}+O\left(\frac{q^4}{\Delta^4}\right)+O\left(\frac{m^2q^2}{\Delta^4}\right)\Big],$$

$$h_2(q^2)=\left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m^2}\right)^2\Big[2\frac{\sqrt{q^2(4m^2-q^2)}}{q^2}\operatorname{arctg}\frac{q^2}{\sqrt{q^2(4m^2-q^2)}}-\frac{\Delta^2+m^2}{\Delta^2-m^2}\ln\frac{\Delta^2}{m^2}+$$
$$+\frac{5}{6}\frac{q^2}{\Delta^2}+O\left(\frac{q^4}{\Delta^4}\right)+O\left(\frac{q^2m^2}{\Delta^4}\right)\Big],$$

$$h_3(q^2)=\frac{1}{2}h_2(q^2).$$

(2.43)$_2$

Nach (2.23) können die Nullstellen folgender Kombinationen im Gebiet $0\le q^2<4m^2$ für Pole in den $D_{il}(q)$ sorgen:

1.) $1-\overset{SS}{\Pi}(q^2)=0$: Pol in $\overset{SS}{D}(q^2)$

2.) $1-\overset{PP}{\Pi}(q^2)=0$: Pol in $\overset{PP}{D}(q^2)$, Pol in $\overset{AP}{D}_\mu(q)$

3.) $1-\overset{V}{f}_1(q^2)=0$: Pol in $\overset{VV}{D}_{\mu\nu}(q)$

4.) $1-\overset{V}{f}_1(q^2)-\overset{V}{f}_2(q^2)=0$: Pol im $q_\mu q_\nu$ -Term von $\overset{VV}{D}_{\mu\nu}(q)$ (2.44)

5.) $1-\overset{A}{f}_1(q^2)=0$: Pol in $\overset{AA}{D}_{\mu\nu}(q)$

6.) $1-\overset{B}{f}_1-\overset{A}{f}_2+\frac{q^2(\overset{P}{f}(q^2))^2}{1-\overset{PP}{\Pi}(q^2)}=0$: Pol im $q_\mu q_\nu$-Term von $\overset{AA}{D}_{\mu\nu}(q)$
Pol in $\overset{PP}{D}(q^2)$, falls $q^2\neq 0$
Pol in $\overset{AP}{D}_\mu(q)$

Als Nebenbedingung haben wir die HF-Selbstkonsistenzgleichung (1.29):

$$1=\frac{g\Delta^2}{2\pi^2}\left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m^2}-\frac{m^2}{\Delta^2}\frac{\Delta^4}{(\Delta^2-m^2)^2}\ln\frac{\Delta^2}{m^2}\right)$$

Die Polbedingungen (2.44) sind alle von folgender Form:

$$1-\psi(q^2)=0 \tag{2.45}$$

Eine Lösung für $q^2=\mu^2$ kann diese Gleichung nur haben, falls für $0\le q^2<4m^2$ ψ folgende Entwicklung zuläßt:

$$\psi(q^2)=1+\psi'(\mu^2)(q^2-\mu^2)+\cdots \tag{2.46}$$

In $\Psi(q^2)$ treten nur die Funktionen $h_1(q^2)$, $q^2\frac{d}{dq^2}h_1(q^2)$, $\frac{m^2}{\Delta^2}h_2(q^2)$ mit dem Faktor $g\Delta^2$ auf. (2.43) läßt erkennen, daß nur die Entwicklung von $h_1(q^2)$ einen mit 1 vergleichbaren konstanten Term enthält. Dieser rührt genau von der quadratischen Divergenz der Vakuumpolarisation her. Die Polbedingungen (2.44) sind mit der HF-Selbstkonsistenzgleichung nur verträglich, wenn die "1" in (2.45) durch den quadratisch "divergenten" Term in $\Psi(q^2)$ kompensiert wird. In diesem Falle bleiben die logarithmisch "divergenten" Terme in der Entwicklung von Ψ übrig, die in $\Psi'(\mu^2)$ stecken. Diese bestimmen die Kopplungskonstante der bosonartigen Bindungszustände an das Fermion. Nun diskutieren wir die Bedingungen (2.44):

$$1.)\ 1-\overset{SS}{\Pi}(q^2)=1+\frac{g\Delta^2}{2\pi^2}\left[(2+q^2\frac{d}{dq^2})h_1(q^2)-\frac{m^2}{\Delta^2}h_2(q^2)\right]=$$

$$=1-\frac{g\Delta^2}{2\pi^2}\left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m^2}\right)^2\left[\frac{\Delta^2m^2}{\Delta^2}+\frac{(4m^2-q^2)\sqrt{q^2(4m^2-q^2)}}{q^2\Delta^2}\operatorname{arctg}\frac{q^2}{\sqrt{q^2(4m^2-q^2)}}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3}\frac{q^2}{\Delta^2}+\frac{1}{2}\frac{q^2}{\Delta^2}\ln\frac{\Delta^2}{m^2}-\frac{3\Delta^2m^2+m^4}{\Delta^2(\Delta^2-m^2)}\ln\frac{\Delta^2}{m^2}+O\left(\frac{q^4}{\Delta^4}\right)+O\left(\frac{m^2q^2}{\Delta^4}\right)\right]$$

Mit der Nebenbedingung (1.29) ergibt sich:

$$1-\overset{SS}{\Pi}(q^2)=-\frac{g\Delta^2}{2\pi^2}\left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m^2}\right)^2\left[\frac{(4m^2-q^2)\sqrt{q^2(4m^2-q^2)}}{q^2\Delta^2}\operatorname{arctg}\frac{q^2}{\sqrt{q^2(4m^2-q^2)}}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3}\frac{q^2}{\Delta^2}+\frac{1}{2}\frac{q^2}{\Delta^2}\ln\frac{\Delta^2}{m^2}-2\frac{(\Delta^2+m^2)}{(\Delta^2-m^2)}\frac{m^2}{\Delta^2}\ln\frac{\Delta^2}{m^2}+O\left(\frac{q^4}{\Delta^4}\right)+O\left(\frac{m^2q^2}{\Delta^4}\right)\right]$$

$$1-\overset{SS}{\Pi}(q^2)=0 \quad \text{für} \quad q^2\approx 4m^2\frac{\ln\frac{\Delta^2}{m^2}}{\left(\ln\frac{\Delta^2}{m^2}+\frac{2}{3}\right)}=\mu_S^2<4m^2 \tag{2.47}$$

$$\overset{SS}{D}(q^2)=\frac{1-\frac{1}{2}\overset{SS}{\Pi}(q^2)}{1-\overset{SS}{\Pi}(q^2)}\xrightarrow[q^2=\mu_S^2]{}\frac{1}{(q^2-\mu_S^2+i\varepsilon)}\cdot\frac{-\Delta^2}{\frac{g\Delta^2}{2\pi^2}\left(\ln\frac{\Delta^2}{m^2}+\frac{2}{3}\right)} \tag{2.48}$$

Daraus lesen wir die Kopplungskonstante ab:

$$(-2ig)i\Lambda_{\alpha\beta}\overset{SS}{D}(q^2)i\Lambda_{\gamma\delta}\longrightarrow(-iG_S)\Lambda_{\alpha\beta}\frac{i}{q^2-\mu_S^2+i\varepsilon}(-iG_S)\Lambda_{\gamma\delta}$$

$$G_S^2=\frac{4\pi^2}{\left(\ln\frac{\Delta^2}{m^2}+\frac{2}{3}\right)} \tag{2.49}$$

Für $\frac{\Delta^2}{m^2} \approx 8.10^{85}$ wird $\ln \frac{\Delta^2}{m^2} \approx 200$ und damit $G_S^2 \approx 0{,}2$.
Im Grenzübergang $\Delta^2 \to \infty$ verschwindet die Kopplungskonstante, und der Pol rückt gegen die Schwelle.

$$2.)\quad 1-\overset{PP}{\Pi}(q^2) = 1+\frac{g\Delta^2}{2\pi^2}\left[(2+q^2\frac{d}{dq^2})h_1(q^2)+\frac{m^2}{\Delta^2}h_2(q^2)\right] =$$

$$= 1-\frac{g\Delta^2}{2\pi^2}\left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m^2}\right)^2\left[\frac{\Delta^2-m^2}{\Delta^2}-\frac{m^2}{\Delta^2}\ln\frac{\Delta^2}{m^2}+\frac{1}{2}\frac{q^2}{\Delta^2}\ln\frac{\Delta^2}{m^2}+\frac{1}{3}\frac{q^2}{\Delta^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{\sqrt{q^2(4m^2-q^2)}}{\Delta^2}\operatorname{arctg}\frac{q^2}{\sqrt{q^2(4m^2-q^2)}}+O(\frac{q^4}{\Delta^4})+O(\frac{m^2q^2}{\Delta^4})\right]$$

Wieder nützen wir die Nebenbedingung aus:

$$1-\overset{PP}{\Pi}(q^2) = -\frac{g\Delta^2}{2\pi^2}\left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m^2}\right)^2\left[\frac{1}{2}\frac{q^2}{\Delta^2}\ln\frac{\Delta^2}{m^2}+\frac{1}{3}\frac{q^2}{\Delta^2}+O(\frac{q^4}{\Delta^4})+O(\frac{q^2m^2}{\Delta^4})-\right.$$

$$\left.-\frac{\sqrt{q^2(4m^2-q^2)}}{\Delta^2}\operatorname{arctg}\frac{q^2}{\sqrt{q^2(4m^2-q^2)}}\right]$$

$$1-\overset{PP}{\Pi}(q^2) = 0 \quad \text{für} \quad q^2=\mu_p^2=0. \tag{2.50}$$

$$\overset{PP}{D}(q^2) = \frac{1-\frac{1}{2}\overset{PP}{\Pi}(q^2)}{1-\overset{PP}{\Pi}(q^2)} - \frac{1}{2}\frac{q^2\varphi^2(q^2)}{(1-\overset{PP}{\Pi}(q^2))^2\left(1-f_1^B-f_2^B+\frac{q^2\varphi^2(q^2)}{1-\overset{PP}{\Pi}(q^2)}\right)}$$

$$\overset{PP}{D}(q^2) \xrightarrow[q^2=0]{} \frac{1}{q^2}\left\{\frac{-\Delta^2}{\frac{g\Delta^2}{2\pi^2}(\ln\frac{\Delta^2}{m^2}-\frac{4}{3})}-\frac{1}{2}\frac{m^2(\ln\frac{\Delta^2}{m^2}-2)^2\cdot 6}{(\ln\frac{\Delta^2}{m^2}-\frac{4}{3})^2\left(1+\frac{3}{4}\frac{g\Delta^2}{2\pi^2}\right)}\right\} \tag{2.51}$$

Der zweite Term ist gegenüber dem ersten vernachlässigbar klein, für die Kopplungskonstante erhält man:

$$-2ig(\gamma_5)_{\alpha\beta}\overset{PP}{D}(q^2)(\gamma_5)_{\gamma\delta} \longrightarrow (-iG_p)(-i\gamma_5)_{\alpha\beta}\frac{i}{q^2-\mu_p^2+i\varepsilon}(-iG_p)(-i\gamma_5)_{\gamma\delta}$$

$$G_p^2 = \frac{4\pi^2}{(\ln\frac{\Delta^2}{m^2}-\frac{4}{3})} \tag{2.52}$$

Die Kopplungskonstante G_P unterscheidet sich nur wenig von G_S, auch sie verschwindet für $\Delta^2 \to \infty$
Mit $D^{PP}(q^2)$ hat auch $D_\mu^{AP}(q)$ einen Pol bei $q^2 = 0$.

3.) $1-\overset{v}{f}_1(q^2) = 1-\frac{g\Delta^2}{4\pi^2}\left[\left(1+q^2\frac{d}{dq^2}\right)h_1(q^2)+\frac{m^2}{\Delta^2}h_2(q^2)\right] =$

$= 1+\frac{g\Delta^2}{4\pi^2}\left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m^2}\right)^2\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\frac{m^2}{\Delta^2}+\frac{1}{6}\frac{q^2}{\Delta^2}+\frac{1}{3}\frac{q^2}{\Delta^2}\ln\frac{\Delta^2}{m^2}+\frac{m^4}{\Delta^2(\Delta^2-m^2)}\ln\frac{\Delta^2}{m^2}-\right.$

$\left.-\frac{2}{3}\frac{(q^2+2m^2)}{q^2\Delta^2}\sqrt{q^2(4m^2-q^2)}\,\mathrm{arctg}\frac{q^2}{\sqrt{q^2(4m^2-q^2)}}+O\left(\frac{q^4}{\Delta^4}\right)+O\left(\frac{m^2q^2}{\Delta^4}\right)\right]$

$1-\overset{v}{f}_1(q^2)=0$ ist für g > o nicht erfüllbar. Der quadratisch "divergente" Term $\frac{g\Delta^2}{8\pi^2}$, der aus $h_1(q^2)$ stammt, tritt hier mit dem falschen Vorzeichen und mit dem falschen Faktor auf. Für die folgende Kombination gilt dasselbe.

4.) $1-\overset{v}{f}_1(q^2)-\overset{v}{f}_2(q^2) = 1-\frac{g\Delta^2}{4\pi^2}\left[\left(1-q^2\frac{d}{dq^2}\right)h_1(q^2)+\frac{m^2}{\Delta^2}h_2(q^2)\right] \neq 0$

für $\quad 0 \leq q^2 < 4m^2$

5.) $1-\overset{B}{f}_1(q^2) = 1-3\frac{g\Delta^2}{4\pi^2}\left[\left(1+q^2\frac{d}{dq^2}\right)h_1(q^2)-\frac{m^2}{\Delta^2}h_2(q^2)\right] =$

$= 1+3\frac{g\Delta^2}{4\pi^2}\left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m^2}\right)^2\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\frac{m^2}{\Delta^2}+\frac{1}{6}\frac{q^2}{\Delta^2}+\frac{1}{3}\frac{q^2}{\Delta^2}\ln\frac{\Delta^2}{m^2}-\frac{m^2}{\Delta^2}\frac{(2\Delta^2+m^2)}{\Delta^2-m^2}\ln\frac{\Delta^2}{m^2}+\right.$

$\left.+\frac{2}{3}\frac{(4m^2-q^2)\sqrt{q^2(4m^2-q^2)}}{q^2\Delta^2}\mathrm{arctg}\frac{q^2}{\sqrt{q^2(4m^2-q^2)}}+O\left(\frac{q^4}{\Delta^4}\right)+O\left(\frac{m^2q^2}{\Delta^4}\right)\right]$

$1-\overset{B}{f}_1(q^2)=0$ ist für g > o wieder nicht erfüllbar.

Deshalb hat auch die letzte Kombination keine Nullstelle.

6.) $1-\overset{B}{f}_1(q^2)-\overset{B}{f}_2(q^2)+\frac{q^2(q^2)}{1-\Pi(q^2)} \neq 0$ für $\quad 0 \leq q^2 < 4m^2$

Insgesamt ergeben sich zwei Bindungszustände, ein skalarer und ein pseudoskalarer, die Masse des letzteren verschwindet in Übereinstimmung mit dem Goldstonetheorem. Die zugehörigen Kopplungskonstanten verhalten sich wie $\left(\ln\frac{\Delta^2}{m^2}\right)^{-1}$ im Einklang mit den Ergebnissen von Müller [9].

Wir haben hier den Vorteil, die $D_{il}(q)$ explizit angeben zu können, insbesondere deren asymptotisches Verhalten für $q^2 \to \infty$, das wir jetzt untersuchen wollen.

Dazu genügt es, die Funktionen $h_i(q^2)$ für $q^2 \gg \Delta^2$ zu entwikkeln, wobei zu beachten ist, daß jetzt auch Imaginärteile auftreten, weil man mit $q^2 \to \infty$ oberhalb aller Schwellen liegt.

$$\gamma(m_i^2, m_j^2, q^2) = \sqrt{-D}\, \ln \frac{m_i^2+m_j^2-q^2+\sqrt{-D}}{m_i^2+m_j^2-q^2-\sqrt{-D}} + 2\pi i \sqrt{-D}$$

$$m_i^2 = m^2, \Delta^2 ; \; m_j^2 = m^2, \Delta^2 .$$

$$\sqrt{-D} = q^2 - (m_i^2+m_j^2) - 2\frac{m_i^2 m_j^2}{q^2} - 2\frac{m_i^2 m_j^2 (m_i^2+m_j^2)}{q^4} + O\left(\frac{1}{q^6}\right) \tag{2.53}$$

$$\ln \frac{m_i^2+m_j^2-q^2+\sqrt{-D}}{m_i^2+m_j^2-q^2-\sqrt{-D}} = \ln \frac{m_i^2 m_j^2}{q^4} + 2\frac{m_i^2+m_j^2}{q^2} + \frac{(m_i^2+m_j^2)^2}{q^4} + 2\frac{m_i^2 m_j^2}{q^4} + O\left(\frac{1}{q^6}\right)$$

Diese Entwicklungen setzen wir ein in die Gleichungen (2.33) bis (2.35) für $h_i(q^2)$ und erhalten asymptotisch:

$$h_1(q^2) = \left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m^2}\right)^2 \left\{ \frac{(\Delta^2-m^2)^2}{q^2\Delta^2} + \frac{(\Delta^6+m^6-\Delta^4 m^2-\Delta^2 m^4)}{q^4\Delta^2} \ln\frac{q^2}{\Delta^2} + O\left(\frac{\Delta^4}{q^4}\right) + O\left(\frac{\Delta^6}{q^6}\ln\frac{q^2}{\Delta^2}\right) - i\pi \frac{(\Delta^6+m^6-\Delta^4 m^2-\Delta^2 m^4)}{q^4\Delta^2} \right\}$$

$$h_2(q^2) = \left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m^2}\right)^2 \left\{ -2\frac{(\Delta^2-m^2)^2}{q^4} \ln\frac{q^2}{\Delta^2} + O\left(\frac{\Delta^4}{q^4}\right) + O\left(\frac{\Delta^6}{q^6}\ln\frac{q^2}{\Delta^2}\right) + 2\pi i \frac{(\Delta^2-m^2)^2}{q^4} \right\}$$

$$h_3(q^2) = \frac{1}{2} h_2(q^2)$$

Real- und Imaginärteile verschwinden für $q^2 \to \infty$, die Imaginärteile jeweils schneller. Das bedeutet:

$$\overline{\Pi}_{jk}(q) \to 0 \text{ für } q^2 \to \infty$$

Asymptotisch erhält man wieder die lokale Wechselwirkung, was nach (2.11) $D_{il}(q) \to \delta_{il}$ bedeutet.

$$\overset{SS}{D}(q^2) \to 1 \;,\; \overset{PP}{D}(q^2) \to 1 \;,\; \overset{PA}{D}_\mu(q) = \phi(q^2) q_\mu \to 0$$

$$\overset{VV}{D}_{\mu\nu}(q) = \overset{V}{F}_1(q^2) g_{\mu\nu} + \overset{V}{F}_2(q^2) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \to g_{\mu\nu} \tag{2.54}$$

$$\overset{AA}{D}_{\mu\nu}(q) = \overset{A}{F}_1(q^2) g_{\mu\nu} + \overset{A}{F}_2(q^2) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \to g_{\mu\nu}.$$

Für $\overset{SS}{D}(q^2), \overset{PP}{D}(q^2), \overset{V}{F_1}(q^2), \overset{A}{F_1}(q^2)$ müssen wir subtrahierte Dispersionsrelationen ansetzen, da diese Funktionen asymptotisch gegen 1 gehen.

Die Potenzabzählung für Selbstenergiegraphen in § 1.6 macht nur asymptotisch für $q^2 \to \infty$ von der Lokalität der Wechselwirkung Gebrauch. Die dort abgeleiteten Aussagen bleiben bei unserer Abschneidemethode auch für die effektive Wechselwirkung gültig, da sich für $q^2 \to \infty$, also weit oberhalb des Abschneideimpulses, wieder die lokale Wechselwirkung ergibt.

Die hier durchgeführte Aufsummation von Vakuumpolarisationsgraphen liefert eine wesentliche Abänderung der Ausgangswechselwirkung, vor allem für kleine Werte von q^2, denn im skalaren und pseudoskalaren Teil treten Pole bei endlichen Massen auf. Es ist nicht zu erwarten, daß man sich bei der Berechnung der Selbstenergie auf die Polterme der effektiven Wechselwirkung beschränken kann.

2.6 Die Rolle der Quasilokalität bei der Bewältigung von Divergenzen.

In § 2.5 wurde gezeigt, daß bei unserer lokalen Wechselwirkung die den quadratischen Divergenzen entsprechenden Terme der Vakuumpolarisation für die Existenz von Bindungszuständen verantwortlich sind. Daß diese Terme bei uns endlich werden, liegt an der Möglichkeit, die Kopplungskonstante g mit einer kleinsten Länge Δ^{-1} in Beziehung zu setzen, so daß $g' = g\Delta^2$ endlich wird.

In der Quantenelektrodynamik hat die Kopplungskonstante $-e_o^2$ die Dimension 1, eine ähnliche Prozedur ist deshalb unmöglich. Mit einer Integralabschneidung werden die auftretenden Divergenzen nur mathematisch definiert, nicht aber eliminiert. Bei der oft angewandten Regularisierung nach Pauli und Villars [20], subtrahiert man den Term weg, der die Eichinvarianz verletzt, was in unserer Näherung für die Vakuumpolarisation genau die quadratische Divergenz ist.

Wir berechnen nun den Photonpropagator $D'_{F\mu\nu}(q)$ in Kettennäherung mit unserer Abschneidefunktion.

$\overset{\circ}{D}_F(q)_{\mu\nu} = \frac{-1}{q^2+i\varepsilon} g_{\mu\nu}$ sei der freie Propagator.

$$D'_F(q)_{\mu\nu} = \overset{\circ}{D}_F(q)_{\mu\nu} + \overset{\circ}{D}_F(q)_{\mu\rho}\, \Pi^{\rho\sigma}(q)\, D'_F(q)_{\sigma\nu} \tag{2.55}$$

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = -e_0^2 \int d^4k\, F(k^2) F((k-q)^2)\, Spur\left(\gamma_\mu S'_F(k)\, \gamma_\nu S'_F(k-q)\right) \tag{2.56}$$

Wie früher kann (2.55) aufgelöst werden mit folgenden Ansätzen:

$$D'_{F\mu\nu} = D_1 g_{\mu\nu} + D_2 \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \;;\; \Pi_{\mu\nu} = \Pi_1 g_{\mu\nu} + \Pi_2 \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \tag{2.57}$$

Es ergibt sich schließlich:

$$D_1 = \frac{-1}{q^2+\Pi_1} \;,\; D_2 = \frac{\Pi_2}{(q^2+\Pi_1)(q^2+\Pi_1+\Pi_2)}$$

$$\left(D'_F\right)_{\mu\nu}(q) = \frac{-1}{q^2+\Pi_1(q^2)} \left(g_{\mu\nu} - \frac{\Pi_2(q^2)}{q^2+\Pi_1(q^2)+\Pi_2(q^2)} \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \tag{2.58}$$

Π_1 und Π_2 können aus früheren Rechnungen entnommen werden, wo folgende Größe auftrat:

$$\overset{VV}{\Pi}_{\mu\nu}(q) = -2ig \int d^4k\, F(k^2) F((k-q)^2)\, Spur\left(\frac{i}{\sqrt{2}} \gamma_\mu S'_F(k) \frac{i}{\sqrt{2}} \gamma_\nu S'_F(k-q)\right)$$

$$= \overset{V}{f}_1(q^2) g_{\mu\nu} + \overset{V}{f}_2(q^2) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}$$

Durch Vergleichung mit (2.56) ergibt sich:

$$\Pi_i = -\frac{e_0^2}{g} \overset{V}{f}_i \quad \text{für } i = 1,2.$$

Soll der Photonpropagator $\left(D'_F\right)_{\mu\nu}(q)$ einen Pol bei $q^2 = 0$ haben, muß Π_1 proportional zu q^2 sein. Mit den Entwicklungen in (2.43) wollen wir zeigen, daß dies nicht erfüllt ist.

$$\begin{aligned} \Pi_1(q^2) &= -\frac{e_0^2}{g} \overset{V}{f}_1(q^2) = -\frac{e_0^2\Delta^2}{4\pi^2}\left[\left(1+q^2\frac{d}{dq^2}\right) h_1(q^2) + \frac{m^2}{\Delta^2} h_2(q^2)\right] = \\ &= \frac{e_0^2\Delta^2}{4\pi^2}\left[\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\frac{m^2}{\Delta^2} - \frac{7}{18}\frac{q^2}{\Delta^2} + \frac{m^4}{\Delta^2(\Delta^2-m^2)} \ln\frac{\Delta^2}{m^2} + \frac{1}{3}\frac{q^2}{\Delta^2}\ln\frac{\Delta^2}{m^2} + \right. \\ &\quad \left. + O\left(\frac{q^4}{\Delta^4}\right) + O\left(\frac{m^2q^2}{\Delta^4}\right)\right] \end{aligned} \tag{2.59}$$

$$\Pi_1(q^2=0) = \frac{e_0^2\Delta^2}{4\pi^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\frac{m^2}{\Delta^2} + \frac{m^4}{\Delta^2(\Delta^2-m^2)}\ln\frac{\Delta^2}{m^2}\right).$$

Damit vergleichen wir das Verhalten von $\Pi_2(q^2)$ für $q^2 \to 0$:

$$\Pi_2(q^2) = -\frac{e_0^2}{g} f_2(q^2) = \frac{e_0^2\Delta^2}{2\pi^2} q^2 \frac{d}{dq^2} h_1(q^2) \sim q^2$$

$$\Pi_2(0) = 0.$$

Eichinvarianz wäre gegeben, falls $\Pi_1(q^2) = -\Pi_2(q^2)$. Dieselben Terme, die verhindern, daß bei $q^2 = 0$ ein Pol existiert, verletzen die Eichinvarianz.

Einen Pol in $(D_F)_{\mu\nu}(q)$ bei $q^2 = 0$ kann man ohne Subtraktion der störenden Terme formal erzwingen durch folgenden Übergang:

$$(\overset{0}{D}_F)_{\mu\nu}(q) = \frac{-1}{q^2+i\varepsilon} g_{\mu\nu} \longrightarrow \frac{-1}{q^2-M^2+i\varepsilon} g_{\mu\nu} \qquad (2.60)$$

Statt (2.58) ergibt sich jetzt für den Photonpropagator:

$$(D_F')_{\mu\nu}(q) = \frac{-1}{q^2-M^2+\Pi_1(q^2)}\left[g_{\mu\nu} - \frac{\Pi_2(q^2)}{q^2-M^2+\Pi_1(q^2)+\Pi_2(q^2)}\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right] \qquad (2.61)$$

Ein Pol bei $q^2 = 0$ existiert, falls $\Pi_1(0) = M^2$, wobei M^2 nach (2.59) der quadratisch divergente Term von Π_1 ist.

$$M^2 = \frac{e_0^2\Delta^2}{4\pi^2}\left[\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\frac{m^2}{\Delta^2} + \frac{m^4}{\Delta^2(\Delta^2-m^2)}\ln\frac{\Delta^2}{m^2}\right], \quad \Delta^2 \approx 8\cdot 10^{35}\,l^{-2} \qquad (2.62)$$

Dem Übergang (2.60) entspricht der Übergang zu einer neuen Wechselwirkung:

$$(-ie_0)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\frac{-i}{q^2+i\varepsilon}(-ie_0)(\gamma_\mu)_{\gamma\delta} \longrightarrow (-ie_0)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\frac{-i}{q^2-M^2+i\varepsilon}(-ie_0)(\gamma_\mu)_{\gamma\delta}.$$

Für physikalisch erreichbare Impulse $q^2 \ll M^2$ stellt die rechte Seite eine quasilokale Wechselwirkung dar:

$$-i\frac{e_0^2}{M^2}(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}(\gamma^\mu)_{\gamma\delta}$$

Die Kopplungskonstante tritt in der Kombination $-\frac{e_0^2}{M^2}$ auf, die uns wohl vertraut ist.

Die vektorielle Komponente der Boppschen Wechselwirkung in fierzinvarianter Form hat nämlich dieselbe Gestalt.

$$-2ig\frac{i}{\sqrt{2}}(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\frac{i}{\sqrt{2}}(\gamma^\mu)_{\gamma\delta} = i\frac{g'}{\Delta^2}(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}(\gamma^\mu)_{\gamma\delta} \quad ; \quad g' = g\Delta^2$$

Die Kopplungskonstanten g' und $-e_o^2$ spielen vergleichbare Rollen. Der Vorzeichenunterschied ist dafür verantwortlich, daß wir in § 2.5 kein Vektorboson erhalten konnten. Wir haben uns nur deshalb auf $g > o$ festgelegt, weil sich für diese Wahl eine von null verschiedene Fermionmasse in HF-Näherung ergab.

Es soll hier nicht weiter untersucht werden, wie die Quantenelektrodynamik in die Gitterraumtheorie einzubauen wäre. Mit diesem Fragekreis hat sich Löwer [21] in seiner Dissertation beschäftigt. Unsere Überlegung zeigt aber, daß wir die lokale Vierfermionenwechselwirkung auffassen können als Grenzfall einer Wechselwirkung mit endlicher Kopplungskonstante g', bei der Bosonen mit einer sehr großen Masse M ausgetauscht werden. Damit in störungstheoretischen Berechnungen keine Divergenzen auftreten, braucht man aber trotzdem noch eine Abschneidung. Sowohl die Länge Δ^{-1}, die charakteristisch ist für die Abschneidung, als auch M^{-1} stellen Abstände dar, bei denen die Nichtlokalität der Wechselwirkung spürbar wird. Deshalb sollten M^2 und Δ^2 von gleicher Größenordnung sein. Für physikalische Impulse haben wir dann eine Wechselwirkung von folgender Form:

$$i\frac{g'}{M^2}\sum_i (O_i)_{\alpha\beta}(O_i)_{\gamma\delta} \sim i\frac{g'}{\Delta^2}\sum_i (O_i)_{\alpha\beta}(O_i)_{\gamma\delta}\,.$$

Auf diese Weise findet die Forderung nach endlichem $g' = g\Delta^2$, die in HF-Näherung für eine endliche Fermionmasse sorgt, eine natürliche Erklärung.

Andererseits erfordert die riesige Masse $M \sim \Delta$ der freien Bosonen eine Selbstenergiekorrektur durch die Vakuumpolarisation von der Größenordnung Δ^2, wenn in der effektiven Wechselwirkung Pole bei endlichen Bosonmassen auftreten sollen. Die Quasilokalität der Ausgangswechselwirkung auf der einen und die quadratischen "Divergenzen" der Vakuumpolarisation auf der anderen Seite spielen genau in der richtigen Weise zusammen, um am Ende Bosonen mit endlicher Masse zu ermöglichen.

3. Berechnung der Massenkorrektur.

3.1 Gleichungen für die Massenmatrix.

Mit $h_1(q^2)$ und $h_2(q^2)$ sind alle Komponenten $D_{kl}(q)$ der effektiven Wechselwirkung bestimmt, denn alle Funktionen, die in den Gleichungen (2.25) für $D_{kl}(q)$ auftreten, können durch $h_1(q^2)$, $q^2 \cdot \frac{d}{dq^2} h_1(q^2)$ und $h_2(q^2)$ ausgedrückt werden. Unsere nächste Aufgabe ist es, die Massenmatrix zu berechnen. Gleichung (2.10) für $\Sigma(p)$ lautet:

$$-i\Sigma(p) = (-4ig)\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} F((p-q)^2)\, C^h D_{hl}(q)\, S_F'(p-q)\, \sigma^l \qquad (3.1)$$

Soweit die Komponenten $D_{kl}(q)$ keine Lorentzskalare sind, haben wir deren Tensor- bzw. Vektorstruktur schon in (2.22) angegeben:

$$\overset{VV}{D}_{\mu\nu}(q) = \overset{V}{F}_1(q^2) g_{\mu\nu} + \overset{V}{F}_2(q^2) \frac{q_\nu q_\mu}{q^2}$$

$$\overset{AA}{D}_{\mu\nu}(q) = \overset{A}{F}_1(q^2) g_{\mu\nu} + \overset{A}{F}_2(q^2) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}$$

$$\overset{PA}{D}_{\mu}(q) = -\overset{AP}{D}_{\mu}(q) = \phi(q^2) q_\mu$$

Für $S_F'(p-q)$ setzen wir in (3.1) den Fermionpropagator in HF-Näherung ein und erhalten:

$$\begin{aligned}\Sigma(p) = 2ig\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{F((p-q)^2)}{((p-q)^2 - m^2 + i\varepsilon)} \Big\{ &-\overset{SS}{D}(q^2)(\not p - \not q + m) - \overset{PP}{D}(q^2)(\not p - \not q - m) + \\ &+ \overset{V}{F}_1(q^2)(\not p - \not q - 2m) - \frac{1}{2}\overset{V}{F}_2(q^2)\left(\frac{\not q(\not p - \not q)\not q}{q^2} + m\right) + \\ &+ 3\overset{A}{F}_1(q^2)(\not p - \not q + 2m) - \frac{3}{2}\overset{A}{F}_2(q^2)\left(\frac{\not q(\not p - \not q)\not q}{q^2} - m\right) + \\ &+ i\sqrt{6}\,\phi(q^2)(pq - q^2 - m\not q)\Big\}\end{aligned} \qquad (3.2)$$

Symmetrieüberlegungen liefern für $\Sigma(p)$ die allgemeine Struktur $\Sigma(p) = \Sigma_S(p^2) + \Sigma_V(p^2)\not p$.
Die rechte Seite von (3.2) enthält in Übereinstimmung damit keine weiteren Matrizen.

Aus (3.2) folgt für $\Sigma_S(p^2)$ und $\Sigma_V(p^2)\not{p}$:

$$\Sigma_S(p^2) = 2ig m \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{F((p-q)^2)}{(p-q)^2 - m^2 + i\varepsilon} \left\{ -\overset{SS}{D}(q^2) + \overset{PP}{D}(q^2) - 2\overset{V}{F}_1(q^2) - \tfrac{1}{2}\overset{V}{F}_2(q^2) + 6\overset{A}{F}_1(q^2) + \tfrac{3}{2}\overset{A}{F}_2(q^2) + \frac{i\sqrt{6}}{m}\phi(q^2)(pq - q^2) \right\} \tag{3.3}$$

$$\Sigma_V(p^2)\not{p} = 2ig \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{F((p-q)^2)}{(p-q)^2 - m^2 + \varepsilon} \left\{ (\not{p} - \not{q}) \left(-\overset{SS}{D}(q^2) - \overset{PP}{D}(q^2) + \overset{V}{F}_1(q^2) + \tfrac{1}{2}\overset{V}{F}_2(q^2) + 3\overset{A}{F}_1(q^2) + \tfrac{3}{2}\overset{A}{F}_2(q^2) \right) - \frac{(pq - q^2)}{q^2} \not{q} \left(\overset{V}{F}_2(q^2) + 3\overset{A}{F}_2(q^2) \right) - i\sqrt{6}\, m \phi(q^2) \not{q} \right\} \tag{3.4}$$

Für die q-Integration von (3.3) und (3.4) sind die Funktionen $D^{SS}(q^2)$, $D^{PP}(q^2)$, $F_i^{\,V}(q^2)$, $F_i^{\,A}(q^2)$, $\phi(q^2)$ in ihrer vorliegenden Gestalt wegen der recht komplizierten Abhängigkeit von q^2 wenig geeignet. Wir gehen deshalb zu Spektraldarstellungen über. Dabei nützt man aus, daß sich die analytischen Eigenschaften der $h_i(q^2)$, die Diskontinuitäten nur für $q^2 \geq 4m^2$ haben, auf $\Pi_{jk}(q)$ übertragen. Man kann leicht nachprüfen, daß auch die Funktionen $D^{SS}(q^2)$ usw. Pole und Diskontinuitäten nur für $q^2 \geq 0$ haben. Das asymptotische Verhalten der effektiven Wechselwirkung für $q^2 \to \infty$ ist ebenfalls bekannt.

Die Spektraldarstellungen lauten:

$$G(q^2) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\sigma^2 \frac{\mathrm{Im}\, G(\sigma^2)}{q^2 - \sigma^2 + i\varepsilon} + \begin{cases} 1 \text{ für } G = \overset{SS}{D}, \overset{PP}{D}, \overset{V}{F}_1, \overset{A}{F}_1. \\ 0 \text{ für } G = \overset{V}{F}_2, \overset{A}{F}_2, i\phi. \end{cases} \tag{3.5}$$

Hier hat man die gewünschte einfache Abhängigkeit von q^2. Die effektive Wechselwirkung $D_{ik}(q)$ setzt sich additiv zusammen aus der lokalen Ausgangswechselwirkung und einem Zusatz in Form des Integrals über die Diskontinuitäten der $D_{ik}(q)$. Mit (3.5) gehen wir ein in die Gleichungen (3.3) und (3.4). Vom Anteil der Ausgangswechselwirkung in (3.5) erhält man in $\Sigma_S(p^2)$ genau die HF-Masse, wenn man die Selbstkonsistenzgleichung (1.29) ausnützt.
In $\Sigma_V(p^2)$ heben sich diese Anteile gegenseitig auf, in Übereinstimmung mit der HF-Näherung, wo $\Sigma_V \equiv 0$ war.

$$\Sigma_s(p^2) = m - \frac{2igm}{\pi}\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\int_0^\infty d\sigma^2 \frac{F((p-q)^2)}{[(p-q)^2-m^2+i\varepsilon][q^2-\sigma^2+i\varepsilon]} \otimes$$

$$\otimes\left\{\begin{array}{l}\mathrm{Im}\left(-\overset{ss}{D}(\sigma^2)+\overset{pp}{D}(\sigma^2)-2\overset{v}{F}_1(\sigma^2)-\frac{1}{2}\overset{v}{F}_2(\sigma^2)+6\overset{a}{F}_1(\sigma^2)+\frac{3}{2}\overset{a}{F}_2(\sigma^2)\right)\\ +\sqrt{6}\,\dfrac{pq-q^2}{m}\,\mathrm{Im}\, i\phi(\sigma^2)\end{array}\right\} \qquad (3.6)$$

$$\Sigma_v(p^2)\not{p} = -\frac{2ig}{\pi}\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\int_0^\infty d\sigma^2 \frac{F((p-q)^2)}{[(p-q)^2-m^2+i\varepsilon][q^2-\sigma^2+i\varepsilon]} \otimes$$

$$\otimes\left\{\begin{array}{l}(\not{p}-\not{q})\,\mathrm{Im}\left(-\overset{ss}{D}(\sigma^2)-\overset{pp}{D}(\sigma^2)+\overset{v}{F}_1(\sigma^2)+\frac{1}{2}\overset{v}{F}_2(\sigma^2)+3\overset{a}{F}_1(\sigma^2)+\frac{3}{2}\overset{a}{F}_2(\sigma^2)\right)\\ -\dfrac{pq-q^2}{q^2}\not{q}\,\mathrm{Im}\left(\overset{v}{F}_2(\sigma^2)+3\overset{v}{F}_2(\sigma^2)\right)-\sqrt{6}\,m\not{q}\,\mathrm{Im}(i\phi(\sigma^2))\end{array}\right\} \qquad (3.7)$$

Die q-Integration kann exakt ausgeführt werden mit derselben Methode, wie sie in § 2.3 bei der Berechnung der Vakuumpolarisation angedeutet wurde.

$$(I_4;\, I_5) := \frac{16\pi^2}{i}\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\,\frac{F((p-q)^2)\;\left(1;\,\frac{pq-q^2}{\Delta^2}\right)}{((p-q)^2-m^2+i\varepsilon)(q^2-\sigma^2+i\varepsilon)} \qquad (3.8)$$

$$(I_6\not{p};\, I_7\not{p}) := \frac{16\pi^2}{i}\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\,\frac{F((p-q)^2)\;\left((\not{p}-\not{q});\,\frac{pq-q^2}{q^2}\not{q}\right)}{((p-q)^2-m^2+i\varepsilon)(q^2-\sigma^2+i\varepsilon)} \qquad (3.9)$$

Wie für die HF-Näherung setzen wir die Abschneidefunktion in folgender Form ein:

$$F((p-q)^2) = F_2((p-q)^2) = \frac{\Delta^4}{(p-q)^2-\Delta^2+i\varepsilon}$$

Die Integrale (3.8) und (3.9) werden im Anhang berechnet, das Ergebnis findet man in (A.38) bis (A.41).

Der letzte Term in (3.7) enthält $mi\phi(\sigma^2)$, was nach (2.23) proportional zu $mi\varphi(\sigma^2)$ ist. Mit der Darstellung für $\varphi(\sigma^2)$ aus (2.42) ergibt sich

$$mi\varphi(\sigma^2) = -\sqrt{6}\,\frac{g\Delta^2}{2\pi^2}\,\frac{m^2}{\Delta^2}\,h_3(\sigma^2) = -\sqrt{6}\,\frac{g\Delta^2}{4\pi^2}\,\frac{m^2}{\Delta^2}\,h_2(\sigma^2).$$

Das ist ein vernachlässigbar kleiner Beitrag für endliches $g\Delta^2$, da $m^2 \ll \Delta^2$ und $h_2(\sigma^2)$ endlich für alle σ^2.
Dieses Argument gilt nicht für den entsprechenden Term in

(3.6). Dafür erhält man:

$$\frac{Pq-q^2}{m} i\phi(\sigma^2) \sim \frac{Pq-q^2}{m} i\varphi(\sigma^2) = -\sqrt{6}\,\frac{g\Delta^2}{4\pi^2}\,\frac{(Pq-q^2)}{\Delta^2}\,h_2(\sigma^2)$$

Über q^2 ist zu integrieren, so daß $\frac{Pq-q^2}{\Delta^2}$ für große q nicht vernachlässigbar ist.

Mit den Definitionen (3.8) und (3.9) ergibt sich für Σ_S und Σ_V:

$$\Sigma_S(P^2) = m + \frac{mg}{8\pi^3}\int_0^\infty d\sigma^2 I_4(\sigma^2,P^2)\Big\{ Im\big(-\overset{SS}{D}(\sigma^2) + \overset{PP}{D}(\sigma^2) - 2\overset{V}{F_1}(\sigma^2) - \tfrac{1}{2}\overset{V}{F_2} + 6\overset{A}{F_1}(\sigma^2) + \tfrac{3}{2}\overset{A}{F_2}(\sigma^2)\big)\Big\}$$

$$+ \frac{mg}{8\pi^3}\int_0^\infty d\sigma^2 I_5(\sigma^2,P^2)\,\sqrt{6}\,Im\Big(i\frac{\Delta^2}{m}\phi(\sigma^2)\Big) \qquad (3.10)$$

$$\Sigma_V(P^2) = \frac{g}{8\pi^3}\int_0^\infty d\sigma^2 I_6(\sigma^2,P^2)\Big\{ Im\big(-\overset{SS}{D}(\sigma^2) - \overset{PP}{D}(\sigma^2) + \overset{V}{F_1}(\sigma^2) + \tfrac{1}{2}\overset{V}{F_2}(\sigma^2) + 3\overset{A}{F_1}(\sigma^2) + \tfrac{3}{2}\overset{A}{F_2}(\sigma^2)\big)\Big\}$$

$$- \frac{g}{8\pi^3}\int_0^\infty d\sigma^2 I_7(\sigma^2,P^2)\,Im\big(\overset{V}{F_2}(\sigma^2) + 3\overset{A}{F_2}(\sigma^2)\big) \qquad (3.11)$$

Wir wollen die auftretenden Imaginärteile ausdrücken durch Real- und Imaginärteile der Funktionen $\overset{SS}{\Pi}, \overset{PP}{\Pi}, \overset{V}{f_1}, \overset{V}{f_2}, \overset{A}{f_1}, \overset{A}{f_2}, i\varphi$, die in (2.42) definiert wurden. Dazu führen wir folgende Abkürzung ein:

$$W[Re\,\psi, Im\,\psi] := \frac{\tfrac{1}{2}\,Im\,\psi}{(1-Re\,\psi)^2 + (Im\,\psi)^2} \qquad (3.12)$$

$$Im\overset{SS}{D} = W[Re\overset{SS}{\Pi}, Im\overset{SS}{\Pi}]$$

$$Im\overset{PP}{D} = W[Re\overset{PP}{\Pi}, Im\overset{PP}{\Pi}] + O\Big(\frac{m^2}{\Delta^2}\Big)$$

$$Im\overset{V}{F_1} = W[Re\overset{V}{f_1}, Im\overset{V}{f_1}] \quad ; \quad Im\overset{A}{F_1} = W[Re\overset{A}{f_1}, Im\overset{A}{f_1}] \qquad (3.13)_1$$

$$Im\overset{V}{F_2} = W[Re(\overset{V}{f_1}+\overset{V}{f_2}), Im(\overset{V}{f_1}+\overset{V}{f_2})] - W[Re\overset{V}{f_1}, Im\overset{V}{f_1}]$$

$$Im\overset{A}{F_2} = W[Re(\overset{A}{f_1}+\overset{A}{f_2}), Im(\overset{A}{f_1}+\overset{A}{f_2})] - W[Re\overset{A}{f_1}, Im\overset{A}{f_1}]$$

$$\mathrm{Im}(i\phi) = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{Re}(i\varphi)\left[(1-\mathrm{Re}(\overset{B}{f_1}+\overset{B}{f_2}))\cdot \mathrm{Im}\overset{PP}{\Pi} + (1-\mathrm{Re}\overset{PP}{\Pi})\cdot \mathrm{Im}(\overset{B}{f_1}+\overset{B}{f_2})\right]}{\left[(1-\mathrm{Re}\overset{PP}{\Pi})^2+(\mathrm{Im}\overset{PP}{\Pi})^2\right]\left[(1-\mathrm{Re}(\overset{B}{f_1}+\overset{B}{f_2}))^2+(\mathrm{Im}(\overset{B}{f_1}+\overset{B}{f_2}))^2\right]} +$$

$$+\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{Im}(i\varphi)\left[(1-\mathrm{Re}\overset{PP}{\Pi})(1-\mathrm{Re}(\overset{B}{f_1}+\overset{B}{f_2}))-\mathrm{Im}\overset{PP}{\Pi}\cdot \mathrm{Im}(\overset{B}{f_1}+\overset{B}{f_2})\right]}{\left[(1-\mathrm{Re}\overset{PP}{\Pi})^2+(\mathrm{Im}\overset{PP}{\Pi})^2\right]\left[(1-\mathrm{Re}(\overset{B}{f_1}+\overset{B}{f_2}))^2+(\mathrm{Im}(\overset{B}{f_1}+\overset{B}{f_2}))^2\right]} + O\left(\frac{m^2}{\Delta^2}\right) \qquad (3.13)$$

3.2 Massenkorrektur.

Die korrigierte Masse folgt aus der Polbedingung (1.18):

$$m' = \frac{\Sigma_S(p^2=m'^2)}{1-\Sigma_V(p^2=m'^2)} \qquad (3.14)$$

Dabei sollte gelten: $Z_2^{-1} = (1-\Sigma_V(m'^2)) \geq 1$

Nur wenn $m'^2 \leq m^2$ ausfällt, treten in $\Sigma_S(m'^2)$ und $\Sigma_V(m'^2)$ keine Imaginärteile auf, weil man unterhalb der niedrigsten Schwelle liegt, die in den Funktionen $I_k(\sigma^2,p^2)$ für $k = 4,5,6,7$ auftreten kann. Diese beginnt nach (A.37) bei $p^2 = (m+\sigma)^2$. Der Träger der Imaginärteile im Integranden von Σ_S und Σ_V umfaßt die Werte $\sigma=\mu_P$ und $\sigma=\mu_S$, wo Pole auftreten, sowie die Halbachse $\sigma \geq 2m$. Da $\mu_P=0$, beginnt die niedrigste Schwelle bei $p^2 = m^2$. Falls die korrigierte Masse m' nicht größer ausfällt aus m_{HF}, bleibt man unterhalb dieser Schwelle.

Die σ-Integration in (3.10) und (3.11) schaffen wir nicht in Strenge. Wichtiger als ein völlig exakter Wert der Massenkorrektur ist für uns die Abhängigkeit vom Abschneideparameter Δ in Z_2 und m'.

Die Funktionen $I_k(\sigma^2,p^2)$ in (3.10) und (3.11) hängen für $p^2 \leq m^2$ nur schwach von p^2 ab. Wir setzen daher näherungsweise

$$I_K(\sigma^2,p^2) \approx I_K(\sigma^2,p^2=0) \text{ für } p^2<m^2,\ k = 4,5,6,7.$$

Die Ausdrücke für $I_k(\sigma^2,p^2 = o)$ sind im Anhang angegeben (vergleiche (A.42) bis (A.45)).
Weiterhin zerlegen wir das Integrationsgebiet in vier Teilgebiete:

1) Beiträge von den Polen für $\sigma^2 < 4m^2$

2) $4m^2 \leq \sigma^2 \leq 10^{-3}\Delta^2$

3) $10^{-3}\Delta^2 \leq \sigma^2 \leq 10^{3}\Delta^2$

4) $\sigma^2 \geq 10^{3}\Delta^2$

In den Gebieten 2) und 4) werden wir die Imaginärteile und die Funktionen $I_k(\sigma^2)$ entwickeln, so daß sich Ausdrücke ergeben, die man noch elementar integrieren kann. Im Gebiet 3) wird die Masse m eliminiert, die entsprechenden parameterfreien Ausdrücke werden an der elektronischen Rechenanlage integriert. Am schwierigsten erweist sich die Entwicklung im Gebiet 2) für σ^2 vergleichbar mit m^2, also in der Nähe der Schwelle. Hier werden wir Fehler in der Größenordnung 0,5 % in Kauf nehmen, wenn $\frac{\Delta^2}{m^2} = 8.10^{85}$, $\ln\frac{\Delta^2}{m^2} \approx 200$ gesetzt wird.

Die Ableitung der Funktionen in den angegebenen Gebieten ist im Anhang abgehandelt. Die in (3.13) auftretenden Real- und Imaginärteile sind in (A.19) bis (A.25) dargestellt, die entsprechenden Entwicklungen der $I_k(\sigma^2)$ in (A.46) bis (A.49).

Zu 1): Beiträge von den Polen.

$$\Sigma_v^1(0) = -\frac{g}{8\pi^3}\int_0^{4m^2} d\sigma^2 I_6(\sigma^2)\left(\mathrm{Im}\overset{SS}{D}(\sigma^2) + \mathrm{Im}\overset{PP}{D}(\sigma^2)\right)$$

$$= -\frac{g\Delta^2}{8\pi^2}\left\{ I_6(0)\,\frac{1}{\frac{g\Delta^2}{2\pi^2}\left(\ln\frac{\Delta^2}{m^2} - \frac{4}{3}\right)} + I_6(\mu_S^2)\,\frac{1}{\frac{g\Delta^2}{2\pi^2}\left(\ln\frac{\Delta^2}{m^2} + \frac{2}{3}\right)} \right\}$$

Wir haben die möglichen Pole und deren Residuen in § 2.5 berechnet, hier wurde Gebrauch gemacht von (2.48) und (2.51). Nach (A.42) gilt:

$$I_6(\sigma^2 = 0) = \left(\frac{1}{2}\ln\frac{\Delta^2}{m^2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$I_6(\sigma^2 = \mu_S^2 \approx 4m^2) \approx \left(\frac{1}{2}\ln\frac{\Delta^2}{m^2} - \frac{7}{12} - \frac{2}{9}\ln 4\right)$$

Das ergibt:

$$\Sigma_v^1(0) \approx -\frac{1}{8}\,\frac{\left(\ln\frac{\Delta^2}{m^2} - 1\right)}{\left(\ln\frac{\Delta^2}{m^2} - \frac{4}{3}\right)} - \frac{1}{8}\,\frac{\left(\ln\frac{\Delta^2}{m^2} - \frac{7}{6} - \frac{4}{9}\ln 4\right)}{\left(\ln\frac{\Delta^2}{m^2} + \frac{2}{3}\right)}$$

Für $\Delta^2 \gg m^2$, also z.B. für $\frac{\Delta^2}{m^2} = 8\cdot 10^{85}$, $\ln\frac{\Delta^2}{m^2} \approx 200$, erhält man

$$\Sigma_v^1(0) \approx -\frac{1}{4}.$$

In $\Sigma_S(0)$ heben sich die Beiträge der Pole von $D^{SS}(\sigma^2)$ und $D^{PP}(\sigma^2)$ bis auf Terme vernachlässigbarer Größenordnung weg, es bleibt nur noch der Pol in $\phi(\sigma^2)$ bei $\sigma^2=0$ zu berücksichtigen.

$$\Sigma_S^1(0) = m\frac{g}{8\pi^3}\int_0^{4m^2} d\sigma^2 I_5(\sigma^2)\sqrt{6}\,\mathrm{Im}\left(i\frac{\Delta^2}{m}\phi(\sigma^2)\right)$$

Aus (2.23) entnehmen wir

$$\phi(\sigma^2) = \frac{1}{2}\,\frac{\varphi(\sigma^2)}{(1-\overset{PP}{\Pi}(\sigma^2))\left(1-\overset{B}{f}_1(\sigma^2)-\overset{B}{f}_2(\sigma^2)+\dfrac{\sigma^2\varphi^2(\sigma^2)}{1-\overset{PP}{\Pi}(\sigma^2)}\right)}$$

und aus (2.42)

$$\varphi(\sigma^2) = \sqrt{6}\,i\,\frac{g\Delta^2}{4\pi^2}\,\frac{m}{\Delta^2}\,h_2(\sigma^2), \text{ wobei } \quad h_2(0) = \left(-\ln\frac{\Delta^2}{m^2}+2\right).$$

Nach (A.47) ist $I_5(\sigma^2=0) = 1$.

$$\Sigma_S^1(0) = m\,\frac{g\Delta^2}{8\pi^2}\,\frac{\frac{g\Delta^2}{4\pi^2}\cdot 6\left(\ln\frac{\Delta^2}{m^2}-2\right)}{\frac{g\Delta^2}{2\pi^2}\left(\ln\frac{\Delta^2}{m^2}-\frac{4}{3}\right)\cdot\frac{7}{4}} = m\,\frac{g\Delta^2}{2\pi^2}\cdot\frac{3}{7}\,\frac{\left(\ln\frac{\Delta^2}{m^2}-2\right)}{\left(\ln\frac{\Delta^2}{m^2}-\frac{4}{3}\right)} \approx \frac{3}{7}m.$$

Berücksichtigt man für die Massenberechnung von der Wechselwirkung nur die Pole, nicht aber den lokalen Anteil, der zur HF-Näherung führt, dann erhält man

$$m' = \frac{\Sigma_S^1(0)}{1-\Sigma_V^1(0)} \approx \frac{\frac{3}{7}m}{1+\frac{1}{4}} = \frac{12}{35}m\,; \quad Z_2^{-1} \approx \frac{5}{4} > 1. \tag{3.15}$$

Z_2^{-1} und m' bleiben auch für $\Delta^2\to\infty$ endlich.

Zu 2): Beiträge vom Gebiet $4m^2 \le \sigma^2 \le 10^{-3}\Delta^2$.

Es sind hier wieder dieselben Anteile mit $\mathrm{Im}\,D^{SS}$, $\mathrm{Im}\,D^{PP}$ und $\mathrm{Im}\,i\phi$, die wesentliche Beiträge zu Σ_S und Σ_V liefern. Die restlichen Terme sind von der Größenordnung 10^{-5}, also für uns vernachlässigbar klein. Dafür ist die Nennerstruktur der Imaginärteile (3.13) verantwortlich, wo überall die Kombination $[(1-\mathrm{Re}\,\psi)^2+(\mathrm{Im}\,\psi)^2]$ auftritt. Nur für $\psi = \overset{SS}{\Pi}$ und $\psi = \overset{PP}{\Pi}$ hebt sich in $(1-\mathrm{Re}\,\psi)^2$ der konstante Term weg, wie wir in § 2.5 bei der Diskussion der Pole schon gesehen haben.

Man erhält also zunächst

$$\Sigma_V^2(0) = -\frac{g}{8\pi^3}\int_{4m^2}^{10^{-3}\Delta^2} d\sigma^2\, I_6(\sigma^2)\left(\mathrm{Im}\, D^{SS}(\sigma^2) + \mathrm{Im}\, D^{PP}(\sigma^2)\right) .$$

Die Entwicklung für $I_6(\sigma^2)$ entnehmen wir (A.48), Im $D^{SS}(\sigma^2)$ und Im $D^{PP}(\sigma^2)$ werden aus (A.19) und (A.20) nach der Formel (3.13) gebildet.

$$\Sigma_V^2(0) \approx \frac{1}{8}\int_{\frac{4m^2}{\Delta^2}}^{10^{-3}} dx\,(\ln x + 2)\left\{\frac{\sqrt{x(x-\frac{4m^2}{\Delta^2})}}{(x\ln x - \frac{2}{3}x)^2 + \pi^2 x(x-\frac{4m^2}{\Delta^2})} + \right.$$

$$\left. + \frac{(x-\frac{4m^2}{\Delta^2})\sqrt{x(x-\frac{4m^2}{\Delta^2})}}{\left((x-\frac{4m^2}{\Delta^2})\ln x - \frac{2}{3}x\right)^2 + \pi^2 \frac{(x-4m^2/\Delta^2)^3}{x}}\right\}$$

$$\approx \frac{1}{4}\int_{\frac{4m^2}{\Delta^2}}^{10^{-3}} dx\, \frac{\ln x + 2}{x\left[(\ln x - \frac{2}{3})^2 + \pi^2\right]} =$$

$$= -\frac{1}{8}\ln\left\{(\ln\frac{\Delta^2}{4m^2} + \frac{2}{3})^2 + \pi^2\right\} + \frac{1}{8}\ln\left\{(\ln 10^3 + \frac{2}{3})^2 + \pi^2\right\}$$

$$+ \frac{2}{3\pi}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\ln \Delta^2/4m^2 + \frac{2}{3}}{\pi} - \frac{2}{3\pi}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\ln 10^3 + \frac{2}{3}}{\pi}$$

$$\approx -\frac{1}{8}\ln\left\{(\ln\frac{\Delta^2}{4m^2} + \frac{2}{3})^2 + \pi^2\right\} + 0{,}526 - \frac{1}{4} + \frac{2}{3\pi}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\ln\frac{\Delta^2}{4m^2} + \frac{2}{3}}{\pi}$$

Es tritt von der unteren Grenze bei $\sigma^2 = 4m^2$ ein Beitrag auf, der für $\Delta^2 \to \infty$ divergiert.

$$\Sigma_S^2(0) \approx m\frac{g}{8\pi^3}\int_{4m^2}^{10^{-3}\Delta^2} d\sigma^2\, I_5(\sigma^2)\sqrt{6}\,\mathrm{Im}\left(i\frac{\Delta^2}{m}\phi(\sigma^2)\right),$$

$$\text{mit } I_5(\sigma^2) = 1 + \frac{\sigma^2}{\Delta^2}\ln\frac{\sigma^2}{\Delta^2} \text{ nach (A.47).}$$

Der recht komplizierte Ausdruck für $\mathrm{Im}(i\phi(\sigma^2))$ in (3.13) vereinfacht sich beträchtlich, da $\mathrm{Im}(f_1^{\hat{A}} + f_2^{\hat{A}})$ vernachlässigt werden kann, nach (A.24).

$$\Sigma_S^2(0) \approx -\frac{2}{7} m \int_{\frac{4m^2}{\Delta^2}}^{10^{-3}} dx\,(1+x\ln x)\,\frac{(1+\frac{5}{4}x)\sqrt{x(x-\frac{4m^2}{\Delta^2})}}{\left[(x\ln x-\frac{2}{3}x)^2+\pi^2 x(x-\frac{4m^2}{\Delta^2})\right]} \approx$$

$$\approx -\frac{2m}{7\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{(\ln\frac{\Delta^2}{4m^2}+\frac{2}{3})}{\pi} - \operatorname{arctg}\frac{\ln 10^3+\frac{2}{3}}{\pi}\right)$$

$$\approx -\frac{2m}{7\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{(\ln\frac{\Delta^2}{4m^2}+\frac{2}{3})}{\pi} - 1{,}18\right)$$

Für $\Delta^2 \to \infty$ ergibt sich keine Divergenz.

Zu 3): $\underline{10^{-3}\Delta^2 \leq \sigma^2 \leq 10^3\Delta^2}$.

Die Integration wurde an der elektronischen Rechenanlage durchgeführt.* Es ergeben sich folgende Werte:

$$\Sigma_S^3(0) = -0{,}156 \quad ; \quad \Sigma_V^3(0) = -0{,}180.$$

Zu 4): $\underline{\sigma^2 \geq 10^3\Delta^2}$.

Die Beiträge sind von der Größenordnung 10^{-5}, wir vernachlässigen sie.

Wir sammeln nun alle Terme aus den verschiedenen Gebieten und fassen zusammen:

$$\Sigma_S(0) \approx m\left(1+\frac{3}{7}-0{,}156+0{,}107-\frac{2}{7\pi}\operatorname{arctg}\frac{(\ln\frac{\Delta^2}{4m^2}+\frac{2}{3})}{\pi}\right) \tag{3.16}$$

$$\Sigma_V(0) \approx \left(-\frac{1}{4}+0{,}276-0{,}180-\frac{1}{8}\ln\left\{(\ln\frac{\Delta^2}{4m^2}+\frac{2}{3})^2+\pi^2\right\}+\right.$$
$$\left.+\frac{2}{3\pi}\operatorname{arctg}\frac{(\ln\Delta^2/4m^2+\frac{2}{3})}{\pi}\right) \tag{3.17}$$

Diese Werte haben wir in (3.14) einzusetzen.

$$m' \approx \frac{\Sigma_S(0)}{1-\Sigma_V(0)} \quad ; \quad Z_2^{-1} = 1-\Sigma_V(0)$$

$$Z_2^{-1} \approx 1{,}15+\frac{1}{8}\ln\left\{(\ln\frac{\Delta^2}{4m^2}+\frac{2}{3})^2+\pi^2\right\}-\frac{2}{3\pi}\operatorname{arctg}\frac{(\ln\frac{\Delta^2}{4m^2}+\frac{2}{3})}{\pi} \tag{3.18}$$

---

* Wertvolle Hilfe bei der Aufstellung des Programms erhielt ich von meinen Kollegen L.Kern-Bausch und A.Vinçon.

Für $\Delta^2 \to \infty$ verschwindet Z_2 und damit auch m'.
m' und Z_2^{-1} hängen noch von $\ln \frac{\Delta^2}{4m^2}$ ab. Z_2^{-1} nimmt sein Minimum für $\ln \frac{\Delta^2}{4m^2} \approx 2$ an, dafür ergibt sich $Z_2^{-1} \approx 1{,}36$. Insbesondere ist damit die Forderung $Z_2^{-1} > 1$ erfüllt. Außerdem ist $\Sigma_S(0) < 1{,}36$ für $\frac{\Delta^2}{4m^2} > 1$, so daß $m' < m$.

Setzen wir für die HF-Masse m etwa die Masse des Protons ein, dann ergibt sich mit den Annahmen des Gitterraums $m \sim l_1^{-1}$ $\frac{\Delta^2}{4m^2} = 2.10^{85}$, $\ln \frac{\Delta^2}{4m^2} \approx 200$. Mit diesen speziellen Werten ergibt sich

$$m' \approx \frac{1{,}24}{2{,}14} m \approx 0{,}58\, m \quad ; \quad Z_2^{-1} \approx 2{,}14 > 1. \tag{3.19}$$

Das entspricht einer Massenabsenkung um etwa 42 %.

Wählt man das Verhältnis $\frac{\Delta^2}{m^2}$ in der Größenordnung 10^5, dann wird $\ln \frac{\Delta^2}{4m^2} \approx 10$, was mit (3.18) zu einer Massenabsenkung um etwa 15 % führt. Allerdings sind unsere Näherungsentwicklungen im Gebiet $4m^2 \leq \sigma^2 \leq 10^{-3}\Delta^2$ für diesen Fall sehr grob. Es soll damit nur gezeigt werden, daß die Massenabsenkung gegenüber der HF-Näherung unabhängig von speziellen Annahmen über die Größenordnung der HF-Masse m beträchtlich ist.

3.3 Diskussion des Ergebnisses.

In § 1.6 wurde für lokale oder mindestens asymptotisch lokale Wechselwirkungen mit Hilfe der Potenzabzählung der Divergenzgrad von Selbstenergiegraphen bestimmt. Die Massenmatrix $\Sigma(p)$ in (3.1), die der Bestimmung des Einteilchenpols im Propagator zugrunde liegt, unterscheidet sich von $\Sigma_{HF}(p)$ in HF-Näherung nur dadurch, daß wir statt der ursprünglich lokalen Wechselwirkung eine effektive Wechselwirkung verwendet haben, die durch Aufsummation aller Leiter- und Kettengraphen der Teilchen-Loch-Streuung berechnet wurde. Die so gewonnene Wechselwirkung $D_{kl}(q)$ geht für $q^2 \to \infty$ wieder in die lokale Wechselwirkung über. Deshalb liefert die Abzählung von § 1.6 für die Divergenzen in $\Sigma(p)$ und $\Sigma_{HF}(p)$ dasselbe Ergebnis. $\Sigma(p)$ sollte danach folgende Struktur haben:

$$\Sigma(p) = \Sigma_S(p^2) + \not{p}\,\Sigma_V(p^2)$$
$$\Sigma_S(p^2) = g\Delta^2 f_S(p^2)\ ;\ \Sigma_V(p^2) = g\Delta^2 f_V(p^2).$$

Dabei sollten $f_S(p^2)$ und $f_V(p^2)$ für $\Delta^2 \to \infty$ nicht divergieren. Mit unserer Annahme $\frac{g\Delta^2}{2\pi^2} \approx 1$ bedeutet dies endliches $\Sigma_S(p^2)$ und $\Sigma_V(p^2)$ auch für $\Delta^2 \to \infty$.

Unser Ergebnis in (3.17) scheint dem zu widersprechen, denn es ergab sich in $\Sigma_V(0)$ ein für $\Delta^2 \to \infty$ divergenter Term der Form

$$ln\left\{\left(ln\frac{\Delta^2}{4m^2} + \frac{2}{3}\right)^2 + \pi^2\right\}.$$

Der Grund ist einfach: Die in (3.17) auftretende Divergenz ist keine Ultraviolettdivergenz, sie rührt vielmehr von der Aufsummation in der effektiven Wechselwirkung her und wird daher bei der Potenzabzählung nicht erfaßt.

Der Term $ln\left\{\left(ln\frac{\Delta^2}{4m^2} + \frac{2}{3}\right)^2 + \pi^2\right\}$ entstand bei der σ^2-Integration des Anteils $Im(D^{SS}(\sigma^2) + D^{PP}(\sigma^2))$ im Gebiet $4m^2 \leq \sigma^2 \leq 10^{-3}\Delta^2$ und rührt von der unteren Grenze bei $\sigma^2 = 4m^2$ her, nicht etwa von der oberen Grenze der σ^2-Integration.

Nur in D^{SS} und D^{PP} ergaben sich durch die Aufsummation Pole, nur von diesen Termen erhalten wir einen divergenten Beitrag zu $\Sigma_V(0)$ für $\Delta^2 \to \infty$.

Wir wollen den Grenzübergang $\Delta^2 \to \infty$ zunächst außer acht lassen und die Ergebnisse (3.15) bzw. (3.18) diskutieren mit der Annahme $\frac{\Delta^2}{m^2} = 8.10^{85}$. Die Absenkung der HF-Masse um etwa 42 % zeigt, daß die HF-Näherung noch sehr grob war. Bei der Aufstellung der Spektraldarstellung für die effektive Wechselwirkung in (3.5) haben wir gesehen, daß neben die lokale Ausgangswechselwirkung, die zur HF-Näherung für $\Sigma(p)$ führt, additiv ein nichtlokaler Anteil mit Polen tritt, der die Massenabsenkung bewirkt. Die Abänderung der ursprünglichen Wechselwirkung durch unsere Aufsummation liefert eine Massenkorrektur, die von derselben Größenordnung ist, wie die HF-Masse selbst. Das zeigt deutlich, daß für die Massenberech-

nung weder die Polterme, noch der lokale Anteil der Wechselwirkung von dominierender Bedeutung sind. Die Masse des Fermions ist dadurch nicht mehr hauptsächlich durch die quadratische Ultravioletttdivergenz der Selbstenergiematrix bestimmt, wie das in HF-Näherung der Fall war.

Die naheliegende und rechnerisch bequeme Polnäherung für die Wechselwirkung liefert nach (3.15) Werte für m' und Z_2, die unabhängig vom Abschneideparameter sind. Dies ist vor allem im Hinblick auf den Grenzübergang $\Delta^2 \to \infty$ ein irreführendes Ergebnis, wie (3.18) zeigt.

Bei der Berechnung der Massenkorrektur in § 3.2 wurde darauf hingewiesen, daß die niedrigste Schwelle im neuen Propagator bei $p^2 = m_{HF}^2$ beginnt. Zwischen dem Einteilchenpol bei $p^2 = m'^2 < m_{HF}^2$ und dem Beginn dieser Schwelle ist also eine Lücke. Hier rächt es sich, daß wir bei unseren Rechnungen auf die Selbstkonsistenz verzichtet haben. Wenn nämlich das pseudoskalare Boson als Goldstoneteilchen die Masse o hat, sollte die erste Schwelle ohne Lücke am Einteilchenpol bei $p^2 = m'^2$ beginnen.

Nun wollen wir noch den Grenzübergang $\Delta^2 \to \infty$ diskutieren, der so geführt wird, daß die HF-Masse endlich bleibt. Nach der HF-Selbstkonsistenzgleichung hängt dann die Kopplungskonstante g in der Form $g = g'\Delta^{-2} = 2\pi^2\Delta^{-2}$ vom Abschneideparameter ab. Nach (3.18) verschwinden m' und Z_2 für $\Delta^2 \to \infty$. Bei der Diskussion der effektiven Wechselwirkung wurde gezeigt, daß auch die Residuen der Pole in $D^{SS}(q^2)$ und $D^{PP}(q^2)$ für $\Delta^2 \to \infty$ verschwinden, wenn man sich auf die Kopplungskonstante g' bezieht, die beim Grenzübergang konstant bleibt (vergl. (2.48) und (2.51)). Der Pol in $D^{SS}(q^2)$ rückt dabei gegen die Schwelle bei $2m_{HF}$.

Obwohl die Fermionenmasse m' für $\Delta^2 \to \infty$ ebenso verschwindet wie die Masse der freien Urfermionen, erhält man beim Grenzübergang nicht die freie Theorie zurück. Der Pol im Propagator der freien Urfermionen bei $p^2 = o$ ist isoliert und hat das Residuum 1. In unserer Näherung hat der Pol bei $p^2 = o$ das Residuum $Z_2 = o$, an den sich nach der obigen Diskussion bei selbstkonsistenter Rechnung sofort ein Kontinuum anschließen sollte, wegen der Existenz von Goldstoneteilchen.

Selbst wenn für unsere Näherung die Energie des Grundzustandes beim Grenzübergang $\Delta^2 \to \infty$ in die Grundzustandsenergie der freien Theorie übergeht, bleibt die vorausgesetzte Entartung des Grundzustandes bestehen. Der Grenzübergang wird ja so geführt, daß die HF-Masse endlich und konstant bleibt. Damit bleibt als Grundannahme unserer störungstheoretischen Berechnungen auf der Basis der HF-Näherung die Brechung der Touschekinvarianz durch den Grundzustand bestehen. Die Goldstoneteilchen existieren unabhängig vom Grenzübergang.

Es bleiben bei unseren Untersuchungen viele Fragen offen. Wir haben die Gleichungen (3.10) und (3.11) für $\Sigma_S(p^2)$ und $\Sigma_V(p^2)$ nur für die Bestimmung des Einteilchenpols ausgenützt. Mit entsprechendem Rechenaufwand könnte man daraus die Spektraldichten des neuen Fermionpropagatos berechnen. Erst dann kann man untersuchen, ob sich oberhalb der ersten Schwelle noch Resonanzen ergeben. Setzt man die so gewonnenen Spektraldichten $\rho_1(m^2)$ und $\rho_2(m^2)$ in die Selbstkonsistenzgleichung ein, die wir in § 2.4 aus dem Goldstonetheorem abgeleitet haben, dann läßt sich eine neue Relation zwischen der Kopplungskonstanten g, dem Abschneideparameter Δ und der Einteilchenmasse herstellen.

Es bleibt aber der diskutierte Mangel bestehen, daß im Fermionpropagator trotz der Existenz von Goldstoneteilchen zwischen dem Einteilchenpol und der ersten Schwelle eine Lücke klafft. Diese kann nur durch die Bewältigung des vollen Selbstkonsistenzprogramms geschlossen werden, das wir zu Beginn dieser Arbeit aufgestellt haben.

Dennoch ist fraglich, ob man dadurch zu mehr als einem Fermion gelangt, etwa durch das Auftreten von langlebigen Resonanzen. Auch die selbstkonsistente Berechnung des Propagators mit den Gleichungen (2.10) bis (2.12) bleibt eine Näherung, vor allem im Hinblick auf die Schwellenstruktur des Propagators. Resonanzen sind aber bestimmt durch die analytische Fortsetzung der Diskontinuitäten am Schnitt. Mann kann nicht hoffen, mit den Methoden, wie sie in dieser Arbeit verwendet wurden, dieses Programm mit angemessenem Aufwand durchzustehen.

Herrn Prof. Dr. F. Bopp verdanke ich die Anregung des Themas, bei dessen Bearbeitung er mir großzügiger Weise viel Spielraum gelassen hat. Für sein reges Interesse am Fortgang und an den Ergebnissen der Arbeit möchte ich ihm herzlich danken.
Prof. Bopp gab mir die Möglichkeit, die Dissertation an seinem Lehrstuhl neben meiner Tätigkeit als Verwalter einer Assistentenstelle anzufertigen.
Ganz besonders anregend waren für mich viele fruchtbare Diskussionen mit Herrn D. Stocker.
Herrn Dr. Maier-Bötzel und Herrn Dr. F. Wahl danke ich dafür, daß sie auf meine Fragestellungen und Probleme so bereitwillig eingegangen sind.

Anhang.

A.1 Zu den Integralen der Vakuumpolarisation.

Bei der Berechnung der Vakuumpolarisation in § 2.3 treten folgende Integrale auf (vergl. (2.26)):

$$[I_1; I_2; I_3] = \frac{\Delta^2}{16\pi^2 i} \int_0^\infty d\lambda \int_0^1 dx \left[\frac{\lambda}{\Delta^2}; \left(\frac{i}{2} g_{\mu\nu} + i q_\mu q_\nu \frac{d}{dq^2}\right); \frac{\lambda x}{\Delta^2} q_\mu\right] \otimes$$

$$\otimes \exp\left[i\lambda(1-x)x\frac{q^2}{\Delta^2} - i\lambda(1-i\varepsilon)\right] \left[\frac{e^{i\lambda(1-x)\left(\frac{\Delta^2-m_1^2}{\Delta^2}\right)} - 1}{i\lambda\left(\frac{\Delta^2-m_1^2}{\Delta^2}\right)}\right] \left[\frac{e^{i\lambda x\left(\frac{\Delta^2-m_2^2}{\Delta^2}\right)} - 1}{i\lambda\left(\frac{\Delta^2-m_2^2}{\Delta^2}\right)}\right]$$

$$:= \frac{i\Delta^2}{16\pi^2}\left[-\frac{1}{\Delta^2} h_2(q^2); \left(\left(\frac{1}{2} g_{\mu\nu} + q_\mu q_\nu \frac{d}{dq^2}\right) h_1(q^2)\right); -\frac{1}{\Delta^2} h_3(q^2) q_\mu\right]$$

Zu berechnen sind die Funktionen $h_1(q^2), h_2(q^2), h_3(q^2)$:

$$h_1(q^2) = i\left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m_1^2}\right)\left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m_2^2}\right) \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2} \int_0^1 dx \exp\left[i\lambda(1-x)x\frac{q^2}{\Delta^2} - i\lambda(1-i\varepsilon)\right] \otimes$$

$$\otimes \left(e^{i\lambda(1-x)\left(\frac{\Delta^2-m_1^2}{\Delta^2}\right)} - 1\right)\left(e^{i\lambda x\left(\frac{\Delta^2-m_2^2}{\Delta^2}\right)} - 1\right) \qquad \text{(A.1)}$$

$$h_2(q^2) = -\left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m_1^2}\right)\left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m_2^2}\right) \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} \int_0^1 dx \exp\left[i\lambda(1-x)x\frac{q^2}{\Delta^2} - i\lambda(1-i\varepsilon)\right] \otimes$$

$$\otimes \left(e^{i\lambda(1-x)\left(\frac{\Delta^2-m_1^2}{\Delta^2}\right)} - 1\right)\left(e^{i\lambda x\left(\frac{\Delta^2-m_2^2}{\Delta^2}\right)} - 1\right) \qquad \text{(A.2)}$$

$$h_3(q^2) = -\left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m_1^2}\right)\left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m_2^2}\right) \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} \int_0^1 dx \cdot x \exp\left[i\lambda(1-x)x\frac{q^2}{\Delta^2} - i\lambda(1-i\varepsilon)\right] \otimes$$

$$\otimes \left(e^{i\lambda(1-x)\left(\frac{\Delta^2-m_1^2}{\Delta^2}\right)} - 1\right)\left(e^{i\lambda x\left(\frac{\Delta^2-m_2^2}{\Delta^2}\right)} - 1\right) \qquad \text{(A.3)}$$

Die Integranden unterscheiden sich nur in den λ - und x-Potenzen vor den Exponentialfunktionen. Für die auftretenden Exponenten werden Abkürzungen eingeführt.

$$N_1(x) = \frac{m_1^2}{\Delta^2} + x\left(\frac{m_2^2-m_1^2}{\Delta^2}\right) - (1-x)x\frac{q^2}{\Delta^2} - i\varepsilon$$

$$N_2(x) = 1 + x\left(\frac{m_2^2-\Delta^2}{\Delta^2}\right) - (1-x)x\frac{q^2}{\Delta^2} - i\varepsilon \qquad 0 \le x \le 1 \qquad \text{(A.4)}$$

$$N_3(x) = \frac{m_3^2}{\Delta^2} + x\left(\frac{\Delta^2-m_1^2}{\Delta^2}\right) - (1-x)x\frac{q^2}{\Delta^2} - i\varepsilon$$

$$N_4(x) = 1 - (1-x)x\frac{q^2}{\Delta^2} - i\varepsilon$$

Später verwenden wir diese Funktionen in der Form

$$N_i(x) = a_i \cdot x^2 + b_i \cdot x + c_i, \quad i = 1,2,3,4.$$

Die λ-Integration in $h_1(q^2)$ wollen wir explizit durchführen.

$$\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2}\left[e^{-i\lambda N_1(x)} - e^{-i\lambda N_2(x)} - e^{-i\lambda N_3(x)} + e^{-i\lambda N_4(x)}\right] =$$

$$= -i\left(N_1(x) - N_2(x) - N_3(x) + N_4(x)\right) -$$

$$-i\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda}\left[N_1(x)e^{-i\lambda N_1(x)} - N_2(x)e^{-i\lambda N_2(x)} - N_3(x)e^{-i\lambda N_3(x)} + N_4(x)e^{-i\lambda N_4(x)}\right]$$

$$= -i\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda}\left[N_2(x)\left(e^{-i\lambda N_1(x)} - e^{-i\lambda N_2(x)}\right) + N_3(x)\left(e^{-i\lambda N_1(x)} - e^{-i\lambda N_3(x)}\right) -\right.$$

$$\left. - N_4(x)\left(e^{-i\lambda N_1(x)} - e^{-i\lambda N_4(x)}\right)\right]$$

Dabei wurde die Gleichung $N_1(x)-N_2(x)-N_3(x)+N_4(x) = 0$ ausgenützt, die aus (A.4) folgt.

Es ergeben sich Integrale von folgendem Typ:

$$\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda}\left(e^{-i\alpha\lambda} - e^{-i\beta\lambda}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{\varepsilon|\alpha|}^\infty \frac{d\lambda}{\lambda}\cos\lambda - \int_{\varepsilon|\beta|}^\infty \frac{d\lambda}{\lambda}\cos\lambda\right]$$

$$-i\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda}\left(\sin\alpha\lambda - \sin\beta\lambda\right)$$

$$= \ln\frac{|\beta|}{|\alpha|} + \begin{cases} 0 & \text{für } \alpha>0,\ \beta>0 \\ -i\pi & \text{für } \alpha>0,\ \beta<0 \\ +i\pi & \text{für } \alpha<0,\ \beta>0 \\ 0 & \text{für } \alpha<0,\ \beta<0 \end{cases} \qquad \text{(A.5)}$$

Diese Fallunterscheidung wird automatisch berücksichtigt, wenn man die Imaginärteile der $N_i(x)$ in (A.4) beachtet und

setzt:

$$\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda}\left(e^{-i\lambda N_i(x)} - e^{-i\lambda N_j(x)}\right) = \ln \frac{N_j(x)}{N_i(x)}$$

Man muß nur festlegen, daß für $q^2 = o$ der Hauptwert des Logarithmus zu nehmen ist, hierfür sind nämlich die Realteile aller N_i positiv.

Schließlich erhält man für $h_1(q^2)$ aus (A.1):

$$h_1(q^2) = -\left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m_1^2}\right)\left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m_2^2}\right)\int_0^1 dx\,\big[N_1(x)\ln N_1(x) - N_2(x)\ln N_2(x) - N_3(x)\ln N_3(x) + N_4(x)\ln N_4(x)\big] \qquad (A.6)$$

Ganz analog führt man die λ-Integration in $h_2(q^2)$ und $h_3(q^2)$ durch.

$$h_2(q^2) = \left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m_1^2}\right)\left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m_2^2}\right)\int_0^1 dx\,\big[\ln N_1(x) - \ln N_2(x) - \ln N_3(x) + \ln N_4(x)\big] \qquad (A.7)$$

$$h_3(q^2) = \left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m_1^2}\right)\left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m_2^2}\right)\int_0^1 x\,dx\,\big[\ln N_1(x) - \ln N_2(x) - \ln N_3(x) + \ln N_4(x)\big] \qquad (A.8)$$

Es bleibt noch die x-Integration, wo wir zunächst mit partieller Integration die Logarithmen wegschaffen:

$$\int_0^1 dx\, N_i(x)\ln N_i(x) = \int_0^1 dx\,(a_i x^2+b_i x+c_i)\ln(a_i x^2+b_i x+c_i)$$

$$= \left\{\left(a_i\frac{x^3}{3}+b_i\frac{x^2}{2}+c_i x\right)\ln(a_i x^2+b_i x+c_i)\right\}_0^1 - \int_0^1 dx\,\frac{\left(a_i\frac{x^3}{3}+b_i\frac{x^2}{2}+c_i x\right)(2a_i x+b_i)}{a_i x^2+b_i x+c_i}$$

$$\int_0^1 dx\ln N_i(x) = \left\{x\ln(a_i x^2+b_i x+c_i)\right\}_0^1 - \int_0^1 dx\,\frac{x(2a_i x+b_i)}{a_i x^2+b_i x+c_i}\,.$$

$$\int_0^1 x\,dx\ln N_i(x) = \left\{\frac{x^2}{2}\ln(a_i x^2+b_i x+c_i)\right\}_0^1 - \int_0^1 dx\,\frac{x^2}{2}\,\frac{(2a_i x+b_i)}{a_i x^2+b_i x+c_i}$$

Da $\int dx\,\frac{x^n}{ax^2+bx+c}$ aus Integraltabellen entnommen werden kann, macht die weitere Berechnung keine Schwierigkeiten mehr.

$$\int_0^1 dx\, N_i(x)\ln N_i(x) = \left(\frac{a_i}{3}+\frac{b_i}{2}+c_i\right)\ln(a_i+b_i+c_i) - \frac{2}{9}a_i - \frac{1}{3}b_i + \frac{1}{6}\frac{b_i^2}{a_i} - \frac{4}{3}c_i -$$

$$-\frac{1}{12}\frac{b_i(b_i^2-6a_ic_i)}{a_i^2}\ln\frac{(a_i+b_i+c_i)}{c_i} + \frac{1}{12}\frac{(b_i^2-4a_ic_i)}{a_i^2}\int_0^1\frac{dx}{N_i(x)} \qquad (A.9)$$

Sei $D_i = 4a_ic_i - b_i^2$ dann ist

Re $D_i < 0$ für $q^2 < (m_1^i - m_2^i)^2$ und für $q^2 > (m_1^i + m_2^i)^2$,

Re $D_i \geq 0$ für $(m_1^i - m_2^i)^2 \leq q^2 \leq (m_1^i + m_2^i)^2$.

Dabei wurde gesetzt:

$$m_1^i = \begin{cases} m_1 & \text{für } i=1,3 \\ \Delta & \text{für } i=2,4 \end{cases}, \qquad m_2^i = \begin{cases} m_2 & \text{für } i=1,2 \\ \Delta & \text{für } i=3,4 \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{N_i(x)} = \frac{1}{\sqrt{-D_i}} \ln \frac{2a_ix+b_i-\sqrt{-D_i}}{2a_ix+b_i+\sqrt{-D_i}} \Bigg|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{-D_i}} \ln \frac{b_i+2c_i+\sqrt{-D_i}}{b_i+2c_i-\sqrt{-D_i}} \tag{A.10}$$

Setzt man in (A.10) $z_k = \frac{b_k+2c_k+\sqrt{-D_k}}{b_k+2c_k-\sqrt{-D_k}}$, so durchläuft der Winkel φ_k in $z_k = r_k \cdot e^{i\varphi_k}$ die Werte 0 bis 2π, wenn man q^2 von 0 bis $q^2 > (m_1^k + m_2^k)^2$ wachsen läßt.

Man erhält also:

$$\int_0^1 \frac{dx}{N_i(x)} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{-D_i}} \ln \frac{b_i+2c_i+\sqrt{-D_i}}{b_i+2c_i-\sqrt{-D_i}} & \text{für } q^2 < (m_1^i - m_2^i)^2 \\ \frac{2}{\sqrt{D_i}} \operatorname{arctg} \frac{2a_i+b_i}{\sqrt{D_i}} - \frac{2}{\sqrt{D_i}} \operatorname{arctg} \frac{b_i}{\sqrt{D_i}} & \text{für } (m_1^i - m_2^i)^2 \leq q^2 \leq (m_1^i + m_2^i)^2 \\ \frac{1}{\sqrt{-D_i}} \ln \frac{b_i+2c_i+\sqrt{-D_i}}{b_i+2c_i-\sqrt{-D_i}} + 2\pi i \frac{1}{\sqrt{-D_i}} & \text{für } q^2 > (m_1^i + m_2^i)^2 \end{cases} \tag{A.11}$$

Die noch ausstehenden Integrale für $h_2(q^2)$ und $h_3(q^2)$ ergeben entsprechend:

$$\int_0^1 dx \ln N_i(x) = \ln(a_i+b_i+c_i) - 2 + \frac{b_i}{2a_i} \ln \frac{a_i+b_i+c_i}{c_i} - \frac{1}{2}\left(\frac{b_i^2-4a_ic_i}{a_i}\right) \int_0^1 \frac{dx}{N_i(x)} \tag{A.12}$$

$$\int_0^1 x\,dx \ln N_i(x) = \frac{1}{2}\ln(a_i+b_i+c_i) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{b_i}{a_i} - \frac{1}{4}\frac{(b_i^2-2a_ic_i)}{a_i^2} \ln \frac{(a_i+b_i+c_i)}{c_i} + \frac{1}{4}\frac{b_i(b_i^2-4a_ic_i)}{a_i^2} \int_0^1 \frac{dx}{N_i(x)} \tag{A.13}$$

Bei der Summation über die verschiedenen Indizes i verschwinden einige Terme wegen des alternierenden Vorzeichens.

Mit $\text{sign}(i) = \begin{cases} +1 & \text{für } i=1,4 \\ -1 & \text{für } i=2,3 \end{cases}$ erhält man:

$$h_1(q^2) = \left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m_1^2}\right)\left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m_2^2}\right)\sum_{i=1}^{4} \text{sign}(i)\left\{-\frac{1}{2}(b_i+2c_i)\ln(a_i+b_i+c_i) - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{6}\frac{b_i^2}{a_i} + \frac{b_i(b_i^2-6a_ic_i)}{12a_i^2}\ln\frac{a_i+b_i+c_i}{c_i} - \frac{(b_i^2-4a_ic_i)^2}{12a_i^2}\int_0^1 \frac{dx}{N_i(x)}\right\} \qquad \text{(A.14)}$$

$$h_2(q^2) = \left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m_1^2}\right)\left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m_2^2}\right)\sum_{i=1}^{4} \text{sign}(i)\left\{\frac{b_i}{2a_i}\ln\frac{(a_i+b_i+c_i)}{c_i} - \frac{(b_i^2-4a_ic_i)}{2a_i}\int_0^1 \frac{dx}{N_i(x)}\right\} \qquad \text{(A.15)}$$

$$h_3(q^2) = \left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m_1^2}\right)\left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m_2^2}\right)\sum_{i=1}^{4} \text{sign}(i)\left\{-\frac{(b_i^2-2a_ic_i)}{4a_i^2}\ln\frac{(a_i+b_i+c_i)}{c_i}\right.$$
$$\left. + \frac{b_i(b_i^2-4a_ic_i)}{4a_i^2}\int_0^1 \frac{dx}{N_i(x)}\right\} \qquad \text{(A.16)}$$

Für die Darstellung der $h_i(q^2)$ in (2.33) bis (2.35) wurden die Definitionen (2.30) bis (2.32) für das Integral (A.11) eingeführt. Die Koeffizienten a_i, b_i, c_i sind durch (A.4) definiert.

A.2 Entwicklungen der Real- und Imaginärteile von $\Pi_{jk}(q)$.

Für die Massenberechnung in § 3 braucht man Entwicklungen für Real- und Imaginärteil der $h_i(q^2 = \sigma^2)$ in folgenden Gebieten:

1) $4m^2 \leq q^2 \leq 10^{-3}\Delta^2$, 2) $10^{-3}\Delta^2 \leq q^2 \leq 10^3\Delta^2$, 3) $q^2 \geq 10^3\Delta^2$

In den Bereichen 1) und 3) sollte die Darstellung möglichst einfach sein, um die Integration in (3.11) und (3.12) elementar bewältigen zu können, im Bereich 2) wollen wir die Masse m eliminieren um parameterfreie Ausdrücke zu haben.

Für $q^2 \geq 4m^2$, sowie $q^2 \leq (\Delta - m)^2$ oder $q^2 \geq (\Delta + m)^2$ lautet Re $h_1(q^2)$ nach (A.14) unter den Voraussetzungen der Störungstheorie mit $m_1 = m_2 = m$:

$$\mathrm{Re}\,h_1(q^2) = \left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m^2}\right)^2 \Bigg\{ -\frac{1}{2}\frac{(\Delta^2-m^2)}{\Delta^2}\ln\frac{\Delta^2}{m^2} - \frac{(\Delta^2-m^2)^3}{6q^4\Delta^2}\ln\frac{\Delta^2}{m^2} + \frac{(\Delta^4-m^4)}{2q^2\Delta^2}\ln\frac{\Delta^2}{m^2}$$
$$+ \frac{1}{3}\frac{(\Delta^2-m^2)^2}{q^2\Delta^2} + \frac{1}{6}\frac{\sqrt{-D}^3}{q^4\Delta^2}\ln\frac{\Delta^2+m^2-q^2+\sqrt{-D}}{\Delta^2+m^2-q^2-\sqrt{-D}}$$
$$- \frac{1}{12}\frac{\sqrt{q^2(q^2-4m^2)}^3}{q^4\Delta^2}\ln\frac{2m^2-q^2+\sqrt{q^2(q^2-4m^2)}}{2m^2-q^2-\sqrt{q^2(q^2-4m^2)}} \qquad \text{(A.17)}$$
$$- \frac{1}{3}\frac{\sqrt{q^2(4\Delta^2-q^2)}^3}{q^4\Delta^2}\operatorname{arctg}\frac{q^2}{\sqrt{q^2(4\Delta^2-q^2)}} \quad \text{für } q^2 < 4\Delta^2$$
$$+ \frac{1}{12}\frac{\sqrt{q^2(q^2-4\Delta^2)}^3}{q^4\Delta^4}\ln\frac{2\Delta^2-q^2+\sqrt{q^2(q^2-4\Delta^2)}}{2\Delta^2-q^2-\sqrt{q^2(q^2-4\Delta^2)}} \quad \text{für } q^2 \geq 4\Delta^2 \Bigg\}$$

$$-D := (\Delta^2-m^2-q^2)^2 - 4m^2q^2$$

Wir entwickeln den Ausdruck (A.17) unter folgenden Voraussetzungen: a) $(\Delta^2 - q^2) \gg m^2$, b) $q^2 \gg m^2$
Im Gebiet 3) für $q^2 > 10^3\Delta^2$ sind beide Voraussetzungen erfüllt, im Gebiet 2) für $10^{-3}\Delta^2 \leq q^2 \leq 10^3\Delta^2$ ist Voraussetzung a) in der Umgebung von $q^2 = \Delta^2$ verletzt, im Gebiet 1) für $q^2 \leq 10^{-3}\Delta^2$ ist die Voraussetzung b) am Beginn der Schwelle bei $q^2 = 4m^2$ nicht erfüllt.
Wir setzen:

$$\sqrt{-D} \approx (\Delta^2-q^2) - m^2\frac{\Delta^2+q^2}{\Delta^2-q^2} - 2\frac{m^4q^2\Delta^2}{(\Delta^2-q^2)^3}$$
$$\ln\frac{\Delta^2+m^2-q^2+\sqrt{-D}}{\Delta^2+m^2-q^2-\sqrt{-D}} \approx \ln\frac{(\Delta^2-q^2)^2\left(1-\frac{m^2q^2}{(\Delta^2-q^2)^2}\right)}{m^2\Delta^2\left(1+\frac{m^2q^2}{(\Delta^2-q^2)^2}\right)}$$

$$\ln\frac{2m^2-q^2+\sqrt{-D}}{2m^2-q^2-\sqrt{-D}} \approx \ln\frac{m^4\left(1+2\frac{m^2}{q^2}\right)}{q^4\left(1-2\frac{m^2}{q^2}\right)}$$

Vernachlässigt man Glieder der Ordnung $\frac{m^2}{\Delta^2}\ln\frac{m^2}{\Delta^2}, \frac{m^2}{q^2}\ln\frac{\Delta^2}{m^2}, \frac{m^2}{(\Delta^2-q^2)}$ usw., so erhält man mit $x = \frac{q^2}{\Delta^2}$:

$$\mathrm{Re}\,h_1(x) = \Bigg\{ \frac{(1-x)^3}{3x^2}\ln(1-x) + \frac{1}{6}x\ln x + \frac{1}{3x} \qquad \text{(A.18)}$$
$$- \frac{1}{3}\frac{\sqrt{x(4-x)}^3}{x^2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{x(4-x)}}\cdot\Theta(4-x) + \frac{1}{12}\frac{\sqrt{x(x-4)}^3}{x^2}\cdot\Theta(x-4)\ln\frac{2-x+\sqrt{x(x-4)}}{2-x-\sqrt{x(x-4)}} \Bigg\}$$

Diese Entwicklung gilt unter den Voraussetzungen

a) $(1-x) \gg \frac{m^2}{\Delta^2}$, b) $x \gg \frac{m^2}{\Delta^2}$.

Betrachtet man trotz Voraussetzung a) diese Entwicklung für $x \approx 1$, so ergibt sich bis auf vernachlässigbare Glieder der Ordnung $\frac{m^2}{\Delta^2}$ derselbe Wert wie aus der strengen Darstellung (A.14). Das liegt daran, daß der Term, in dem die Kombination $(\Delta^2 - q^2)$ auftritt, in der Umgebung von $q^2 = \Delta^2$ vernachlässigbar klein ist. Die Entwicklung (A.18) ist also in den Gebieten 2) und 3), sowie im oberen Teil des Gebietes 1) praktisch streng. In den Teilen des Gebietes 1), wo q^2 und m^2 vergleichbar sind, ist $(\Delta^2 - q^2) \gg m^2$, sowie $\frac{q^2}{\Delta^2} \ll 1$.
Die Entwicklung liefert hier:

$$\mathrm{Re}\, h_1(q^2) = \left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2 - m^2}\right)^2 \left\{ \frac{1}{6}\frac{q^2}{\Delta^2} \ln \frac{m^2}{\Delta^2} - \frac{1}{6}\frac{q^2}{\Delta^2} - \frac{1}{2} + \frac{5}{6}\frac{m^2}{\Delta^2} + \frac{m^2}{\Delta^2 - m^2} \ln \frac{\Delta^2}{m^2} \right.$$
$$- \frac{(q^2 - 4m^2)\sqrt{q^2(q^2-4m^2)}}{12 q^2 \Delta^2} \ln \frac{2m^2 - q^2 + \sqrt{q^2(q^2-4m^2)}}{2m^2 - q^2 - \sqrt{q^2(q^2-4m^2)}}$$
$$\left. + O\left(\frac{q^4}{\Delta^4}\right) + O\left(\frac{m^2 q^2}{\Delta^4}\right) \right\}$$

Dafür setzen wir in guter Näherung

$$\mathrm{Re}\, h_1(q^2) \approx \left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2 - m^2}\right)^2 \left\{ \frac{1}{6}\frac{q^2}{\Delta^2} \ln \frac{q^2}{\Delta^2} - \frac{m^2}{\Delta^2} \ln \frac{m^2}{\Delta^2} - \frac{1}{2}\frac{(\Delta^2 + m^2)}{\Delta^2} - \frac{1}{6}\frac{q^2}{\Delta^2} \right\} .$$

Die Abweichung beträgt für $q^2 = 4m^2$: $\left(\frac{2}{3}\ln 4 - \frac{1}{3}\right)\frac{m^2}{\Delta^2} \approx 0{,}6\,\frac{m^2}{\Delta^2}$

In Bezug auf die logarithmischen Terme, die nach Ausnutzung der Selbstkonsistenzgleichung (1.29) dominieren, entspricht dies mit $\ln \frac{\Delta^2}{m^2} \approx 200$ einem Fehler von 0,45 %. Für wachsende q^2 wird die Näherung immer besser. Auf diese Weise gelangt man zu folgenden Darstellungen:

$$\overset{PP}{\Pi}(q^2) = -\frac{g\Delta^2}{2\pi^2}\left(2h_1(q^2) + q^2 \frac{d}{dq^2} h_1(q^2) + \frac{m^2}{\Delta^2} h_2(q^2)\right)$$

$$\mathrm{Re}\,\overset{PP}{\Pi}(q^2) \approx \begin{cases} 1 + \frac{g\Delta^2}{2\pi^2}\left(\frac{1}{2}\frac{q^2}{\Delta^2}\ln\frac{\Delta^2}{q^2} + \frac{1}{3}\frac{q^2}{\Delta^2}\right) & ; \quad 4m^2 \le q^2 \le 10^{-3}\Delta^2 \\ \frac{g\Delta^2}{2\pi^2}\left[\frac{(1-x)^2}{x}\ln(1-x) - \frac{1}{2}x\ln x + \Theta(4-x)\cdot\frac{(2-x)}{x}\sqrt{x(4-x)}\,\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{x(4-x)}}\right. & \\ \left. \quad - \Theta(x-4)\cdot\frac{(x-2)}{4x}\sqrt{x(x-4)}\ln\frac{x-2+\sqrt{x(x-4)}}{x-2-\sqrt{x(x-4)}}\right] & ; \; 10^{-3} \le x = \frac{q^2}{\Delta^2} \le 10^3 \\ -\frac{g\Delta^2}{2\pi^2}\frac{1}{x} & ; \; x > 10^3. \end{cases} \qquad \text{(A.19)}$$

$$\frac{\operatorname{Im}\overset{PP}{\Pi}(q^2)}{2\pi} \approx \begin{cases} \frac{q\Delta^2}{2\pi^2}\frac{\sqrt{q^2(q^2-4m^2)}}{4\Delta^2} & ;\ 4m^2 \le q^2 \le 10^{-3}\Delta^2 \\ \frac{q\Delta^2}{2\pi^2}\left[\frac{x}{4} - \Theta(x-1)\cdot\frac{(x-1)^2}{x} + \Theta(x-4)\cdot\frac{(x-2)}{4x}\sqrt{x(x-4)}\right] & ;\ x=\frac{q^2}{\Delta^2} \\ \frac{q\Delta^2}{2\pi^2}\frac{3}{4x^3} & ;\ x=\frac{q^2}{\Delta^2} > 10^3 \end{cases} \quad 10^{-3}\le x\le 10^3 \qquad (A.19)_2$$

$$\overset{SS}{\Pi}(q^2) = -\frac{q\Delta^2}{2\pi^2}\left(2h_1(q^2) + q^2\frac{d}{dq^2}h_1(q^2) - \frac{m^2}{\Delta^2}h_2(q^2)\right)$$

$$\operatorname{Re}\overset{SS}{\Pi}(q^2) \approx \begin{cases} 1 + \frac{q\Delta^2}{2\pi^2}\left(\frac{q^2-4m^2}{2\Delta^2}\ln\frac{\Delta^2}{q^2} + \frac{1}{3}\frac{q^2}{\Delta^2}\right) & ;\ 4m^2 \le q^2 \le 10^{-3}\Delta^2 \\ \operatorname{Re}\overset{PP}{\Pi}(q^2) & \text{sonst} \end{cases} \qquad (A.20)$$

$$\frac{\operatorname{Im}\overset{SS}{\Pi}(q^2)}{2\pi} \approx \begin{cases} \frac{q\Delta^2}{2\pi^2}\frac{(q^2-4m^2)\sqrt{q^2(q^2-4m^2)}}{4\Delta^2 q^2} & ;\ 4m^2 \le q^2 \le 10^{-3}\Delta^2 \\ \frac{\operatorname{Im}\overset{PP}{\Pi}(q^2)}{2\pi} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\overset{V}{f}_1(q^2) = \frac{q\Delta^2}{4\pi^2}\left(h_1(q^2) + q^2\frac{d}{dq^2}h_1(q^2) + \frac{m^2}{\Delta^2}h_2(q^2)\right)$$

$$\operatorname{Re}\overset{V}{f}_1(q^2) \approx \begin{cases} -\frac{1}{4} - \frac{q\Delta^2}{4\pi^2}\cdot\frac{1}{3}\frac{q^2}{\Delta^2}\ln\frac{\Delta^2}{q^2} & ;\ 4m^2 \le q^2 \le 10^{-3}\Delta^2 \\ \frac{q\Delta^2}{4\pi^2}\Big[\frac{x}{3}\ln x - \frac{1}{3x} + \frac{2(1-x)^3 - 3(1-x)^2}{3x^2}\ln(1-x) \\ \quad -\frac{2}{3}\Theta(4-x)\cdot\frac{(1-x)}{x}\sqrt{x(4-x)}\,\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{x(4-x)}} \\ \quad +\frac{1}{6}\Theta(x-4)\cdot\frac{(1-x)}{x}\sqrt{x(x-4)}\ln\frac{2-x+\sqrt{x(x-4)}}{2-x-\sqrt{x(x-4)}}\Big] & ;\ 10^{-3} \le x \le 10^3 \\ -\frac{q\Delta^2}{4\pi^2}\frac{1}{x^2}\ln x & ;\ x > 10^3 \end{cases} \qquad (A.21)$$

$$\frac{\operatorname{Im}\overset{V}{f}_1(q^2)}{2\pi} \approx \begin{cases} -\frac{q\Delta^2}{4\pi^2}\frac{(q^2+2m^2)\sqrt{q^2(q^2-4m^2)}}{6q^2\Delta^2} & ;\ 4m^2 \le q^2 \le 10^{-3}\Delta^2 \\ \frac{q\Delta^2}{4\pi^2}\left[-\frac{x}{6} + \Theta(x-1)\cdot\frac{(2x^2-x-1)}{x^2}(x-1) - \Theta(x-4)\cdot\frac{(x-1)}{6x}\sqrt{x(x-4)}\right] & ;\ 10^{-3} \le x \le 10^3 \\ \frac{q\Delta^2}{4\pi^2}\cdot\frac{1}{2x^2} & ;\ x > 10^3 \end{cases}$$

$$f_1^A(q^2) = \frac{3g\Delta^2}{4\pi^2}\left(h_1(q^2) + q^2\frac{d}{dq^2}h_1(q^2) - \frac{m^2}{\Delta^2}h_2(q^2)\right)$$

$$\mathrm{Re}\, f_1^A(q^2) \approx 3\,\mathrm{Re}\, f_1^V(q^2)$$

$$\frac{\mathrm{Im}\, f_1^A(q^2)}{2\pi} \approx \begin{cases} -\dfrac{3g\Delta^2}{4\pi^2}\dfrac{(q^2-4m^2)\sqrt{q^2(q^2-4m^2)}}{6q^2\Delta^2} & ;\ 4m^2 \le q^2 \le 10^{-3}\Delta^2 \\ 3\dfrac{\mathrm{Im}\, f_1^V(q^2)}{2\pi} & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{(A.22)}$$

$$f_1^V(q^2) + f_2^V(q^2) = \frac{g\Delta^2}{4\pi^2}\left(h_1(q^2) - q^2\frac{d}{dq^2}h_1(q^2) + \frac{m^2}{\Delta^2}h_2(q^2)\right)$$

$$\mathrm{Re}\left(f_1^V(q^2) + f_2^V(q^2)\right) \approx \begin{cases} -\dfrac{1}{4} & ;\ 4m^2 \le q^2 \le 10^{-3}\Delta^2 \\ \dfrac{g\Delta^2}{4\pi^2}\left[\dfrac{1}{x} + \dfrac{(1-x)^2}{x^2}\ln(1-x) - 2\cdot\Theta(4-x)\cdot\dfrac{\sqrt{x(4-x)}}{x}\,\mathrm{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{x(4-x)}}\right. & \\ \qquad \left. + \dfrac{1}{2}\Theta(x-4)\cdot\dfrac{\sqrt{x(x-4)}}{x}\ln\dfrac{2-x+\sqrt{x(x-4)}}{2-x-\sqrt{x(x-4)}}\right] & ;\ 10^{-3} \le x \le 10^3 \\ \dfrac{g\Delta^2}{4\pi^2}\left(\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x^2}\ln x\right) & ;\ x > 10^3 \end{cases} \qquad \text{(A.23)}$$

$$\frac{\mathrm{Im}\left(f_1^V(q^2) + f_2^V(q^2)\right)}{2\pi} \approx \begin{cases} 0 & ;\ 4m^2 \le q^2 \le 10^{-3}\Delta^2 \\ \dfrac{g\Delta^2}{4\pi^2}\left[-\Theta(x-1)\cdot\dfrac{(x-1)^2}{2x^2} + \Theta(x-4)\cdot\dfrac{\sqrt{x(x-4)}}{2x}\right] & ;\ 10^{-3} \le x \le 10^3 \\ -\dfrac{g\Delta^2}{4\pi^2}\dfrac{3}{2x^2} & ;\ x > 10^3 \end{cases}$$

$$f_1^A(q^2) + f_2^A(q^2) = \frac{3g\Delta^2}{4\pi^2}\left(h_1(q^2) - q^2\frac{d}{dq^2}h_1(q^2) - \frac{m^2}{\Delta^2}h_2(q^2)\right)$$

$$\mathrm{Re}\left(f_1^A(q^2) + f_2^A(q^2)\right) \approx 3\,\mathrm{Re}\left(f_1^V(q^2) + f_2^V(q^2)\right) \qquad \text{(A.24)}$$

$$\mathrm{Im}\left(f_1^A(q^2) + f_2^A(q^2)\right) \approx \begin{cases} \dfrac{3g\Delta^2}{4\pi^2}\dfrac{m^2}{\Delta^2}\dfrac{\sqrt{q^2(q^2-4m^2)}}{q^2} & ;\ 4m^2 \le q^2 \le 10^{-3}\Delta^2 \\ 3\dfrac{\mathrm{Im}\left(f_1^V(q^2) + f_2^V(q^2)\right)}{2\pi} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\varphi(q^2) = \sqrt{6}\, i\, \frac{q\Delta^2}{2\pi^2}\, \frac{m}{2\Delta^2}\, h_2(q^2)$$

$$\mathrm{Re}(i\varphi(q^2)) \approx -\frac{q\Delta^2}{4\pi^2}\frac{m}{\Delta^2}\sqrt{6} \otimes \begin{cases} -\ln\frac{\Delta^2}{q^2} + \frac{5}{6}\frac{q^2}{\Delta^2} \quad ; \; 4m^2 \le q^2 \le 10^{-3}\Delta^2 \\ \left[\ln x + 2\frac{(1-x)}{x}\ln(1-x) + 2\Theta(4-x)\cdot\frac{\sqrt{x(4-x)}}{x}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{x(4-x)}}\right. \\ \left. -\frac{1}{2}\Theta(x-4)\frac{\sqrt{x(x-4)}}{x}\ln\frac{2-x+\sqrt{x(x-4)}}{2-x-\sqrt{x(x-4)}}\right] ; \; 10^{-3} \le x \le 10^3 \\ \frac{1}{x^2}\ln x \quad ; \quad x > 10^3 \end{cases} \tag{A.25}$$

$$\frac{\mathrm{Im}(i\varphi(q^2))}{2\pi} \approx -\frac{q\Delta^2}{4\pi^2}\frac{m}{\Delta^2}\sqrt{6} \otimes \begin{cases} -\frac{\sqrt{q^2(q^2-4m^2)}}{2q^2} \quad ; \; 4m^2 \le q^2 \le 10^{-3}\Delta^2 \\ \left[-\frac{1}{2} + \Theta(x-1)\cdot\frac{(x-1)}{x} - \Theta(x-4)\cdot\frac{\sqrt{x(x-4)}}{2x}\right] ; \; 10^{-3} \le x \le 10^3 \\ \frac{1}{x^2} \quad ; \quad x > 10^3 \end{cases}$$

A.3 Zu den Integralen bei der Berechnung der Selbstenergie.

Es sind noch die Integrale zu berechnen, die in § 3 bei der Bestimmung von $\Sigma(p)$ auftreten (vergl.(3.8) und (3.9)).

$$\left[I_4; I_5; I_6 \not{p}\right] := \frac{16\pi^2}{i}\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\, \frac{\Delta^4\left[1; \frac{pq-q^2}{\Delta^2}; \not{p}-\not{q}\right]}{((p-q)^2-m^2+i\varepsilon)(q^2-\sigma^2+i\varepsilon)((p-q)^2-\Delta^2+i\varepsilon)^2} \tag{A.26}$$

Die Nenner werden in den Exponenten geschafft und dort quadratisch ergänzt:

$$\frac{16\pi^2}{i}\Delta^4\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\int_0^\infty d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\delta\left[1; \left(-q^2 + \frac{\beta(\alpha+\beta+\delta)}{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2}p^2 - \frac{(\alpha+\gamma+\delta-\beta)}{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}pq\right)\Delta^{-2}; \left(\frac{\beta\not{p}}{\alpha+\beta+\gamma+\delta} - \not{q}\right)\right]\otimes$$

$$\otimes \exp\left[i(\alpha+\beta+\gamma+\delta)q^2 + i\frac{(\alpha+\gamma+\delta)\beta}{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}p^2 - i\alpha(m^2-i\varepsilon) - i\beta(\sigma^2-i\varepsilon) - i(\gamma+\delta)(\Delta^2-i\varepsilon)\right]$$

$$= -\Delta^4\int_0^\infty d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\delta\left[\frac{1}{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2}; \left(\frac{-2i}{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^3} + \frac{\beta(\alpha+\beta+\delta)}{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^4}p^2\right)\Delta^{-2}; \frac{\beta\not{p}}{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^3}\right]\otimes$$

$$\otimes \exp\left[i\frac{(\alpha+\gamma+\delta)\beta}{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}p^2 - i\alpha(m^2-i\varepsilon) - i\beta(\sigma^2-i\varepsilon) - i(\gamma+\delta)(\Delta^2-i\varepsilon)\right]$$

Man setzt $\int_0^\infty d\lambda\, \delta(\alpha+\beta+\gamma+\delta-\lambda) = 1$ und führt eine Skalentransformation $\alpha = \lambda\alpha'$, $\beta = \lambda\beta'$ usw. durch.

$$-\Delta^4 \int_0^\infty d\lambda \int_0^\infty \frac{d\alpha\, d\beta}{d\gamma\, d\delta}\, \delta(\alpha+\beta+\gamma+\delta-1)\left[\lambda\,;\, \frac{-i}{\Delta^2}\left(2+p^2\frac{d}{dp^2}\right)\,;\, \lambda\beta\not{p}\right] \otimes$$

$$\otimes \exp\left[i\lambda(\alpha+\gamma+\delta)\beta p^2 - i\lambda\alpha(m^2-i\varepsilon) - i\lambda\beta(\sigma^2-i\varepsilon) - i\lambda(\gamma+\delta)(\Delta^2-i\varepsilon)\right]$$

Bei den nachfolgenden Parameterintegrationen ist zu beachten, daß man eine Begrenzung des Integrationsgebietes erhält.

Mit $x := (\alpha+\gamma+\delta) \geq 0$ folgt: $0 \leq \beta = 1-x$, also $0 \leq x \leq 1$,

$$0 \leq \alpha = x-\gamma-\delta \;;\; 0 \leq \gamma \leq x-\delta \;;\; 0 \leq \delta \leq x.$$

$$-\Delta^4 \int_0^\infty d\lambda \int_0^1 dx \left[\lambda\,;\, \frac{-i}{\Delta^2}\left(2+p^2\frac{d}{dp^2}\right)\,;\, \lambda(1-x)\not{p}\right]\left[\frac{e^{i\lambda x(\Delta^2-m^2)} - 1 - i\lambda x(\Delta^2-m^2)}{(-i\lambda(\Delta^2-m^2))^2}\right] \otimes$$

$$\otimes \exp\left[i\lambda x(1-x)p^2 - i\lambda x(\Delta^2-i\varepsilon) - i\lambda(1-x)(\sigma^2-i\varepsilon)\right]$$

Mit $\lambda' = \lambda\Delta^2$ erhält man schließlich

$$[I_4; I_5; I_6] = \left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m^2}\right)^2 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2} \int_0^1 dx \left[\lambda\,;\, -i\left(2+p^2\frac{d}{dp^2}\right)\,;\, \lambda(1-x)\right] \otimes$$

$$\otimes \left[e^{i\lambda\left(\frac{\Delta^2-m^2}{\Delta^2}\right)x} - 1 - i\lambda x\left(\frac{\Delta^2-m^2}{\Delta^2}\right)\right] \exp\left[i\lambda x(1-x)\frac{p^2}{\Delta^2} - i\lambda x(1-i\varepsilon) - i\lambda(1-x)(\sigma^2-i\varepsilon)\right]. \tag{A.27}$$

In gleicher Weise berechnet man das letzte Integral:

$$I_7\not{p} := \frac{16\pi^2}{i}\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\, \frac{\frac{pq-q^2}{q^2}\not{q}}{((p-q)^2-m^2+i\varepsilon)(q^2-\sigma^2+i\varepsilon)} \cdot \frac{\Delta^4}{((p-q)^2-\Delta^2+i\varepsilon)^2} \tag{A.28}$$

Wegen des zusätzlichen Faktors q^{-2} muß hier ein weiterer Parameter eingeführt werden. Man erhält:

$$I_7 = -i\frac{\Delta^2}{\sigma^2}\left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m^2}\right)^2 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2} \int_0^1 dx \left(3x-\frac{1}{2}+x p^2\frac{d}{dp^2}\right) \exp\left[i\lambda(1-x)x\frac{p^2}{\Delta^2} - i\lambda x(1-i\varepsilon)\right] \otimes$$

$$\otimes \left[e^{-i\lambda(1-x)\left(\frac{\sigma^2}{\Delta^2}-i\varepsilon\right)} - 1\right]\left[e^{i\lambda x\left(\frac{\Delta^2-m^2}{\Delta^2}\right)} - 1 - i\lambda x\left(\frac{\Delta^2-m^2}{\Delta^2}\right)\right]. \tag{A.29}$$

Man kann $I_7(\sigma^2, p^2)$ wie folgt darstellen:

$$I_7(\sigma^2,p^2) := \frac{\Delta^2}{\sigma^2}\left(J(\sigma^2,p^2) - J(\sigma,p^2)\right) \tag{A.30}$$

$$J(\sigma^2,p^2) = -i\left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m^2}\right)^2 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2} \int_0^1 dx \left(3x - \frac{1}{2} + xp^2\frac{d}{dp^2}\right)\left[e^{i\lambda\left(\frac{\Delta^2-m^2}{\Delta^2}\right)x} - 1 - i\lambda x\left(\frac{\Delta^2-m^2}{\Delta^2}\right)\right] \cdot$$

$$\cdot \exp\left[i\lambda(1-x)x\frac{p^2}{\Delta^2} - i\lambda x(1-i\varepsilon) - i\lambda(1-x)\left(\frac{\sigma^2}{\Delta^2} - i\varepsilon\right)\right]. \tag{A.31}$$

Die Integrale (A.27) und (A.31) unterscheiden sich von den bereits berechneten in (A.1) bis (A.3) im Exponentialteil, weil wir in der Massenmatrix die stärkere Abschneidefunktion verwenden müssen. Die weitere Lösung verläuft jedoch analog. Wir definieren

$$\begin{aligned} M_1(x) &:= \frac{m^2}{\Delta^2}x + (1-x)\frac{\sigma^2}{\Delta^2} - (1-x)x\frac{p^2}{\Delta^2} - i\varepsilon \equiv a_1x^2 + b_1x + c_1 - i\varepsilon \\ M_2(x) &:= x + (1-x)\frac{\sigma^2}{\Delta^2} - (1-x)x\frac{p^2}{\Delta^2} - i\varepsilon \equiv a_2x^2 + b_2x + c_2 - i\varepsilon \quad . \end{aligned} \tag{A.32}$$

$$I_4 = \left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m^2}\right)^2 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} \int_0^1 dx \left(e^{-i\lambda M_1(x)} - e^{-i\lambda M_2(x)} + i\lambda(M_1(x)-M_2(x))e^{-i\lambda M_2(x)}\right)$$

Auch hier tritt wieder das Integral (A.5) auf, wir können das Ergebnis der λ-Integration sofort angeben.

$$I_4 = -\left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m^2}\right)^2 \int_0^1 dx \left(\ln M_1(x) - \ln M_2(x)\right) - \left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m^2}\right) \int_0^1 \frac{x\,dx}{M_2(x)} \tag{A.33}$$

$$I_5 = -i\left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m^2}\right)^2 \left(2 + p^2\frac{d}{dp^2}\right) \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2} \int_0^1 dx \left(e^{-i\lambda M_1(x)} - e^{-i\lambda M_2(x)} + i\lambda(M_1(x)-M_2(x))e^{-i\lambda M_2(x)}\right)$$

$$= \left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m^2}\right) + \left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m^2}\right)^2 \left(2 + p^2\frac{d}{dp^2}\right) \int_0^1 dx \left(M_1(x)\ln M_1(x) - M_2(x)\ln M_2(x) + x\left(\frac{\Delta^2-m^2}{\Delta^2}\right)\ln M_2(x)\right) \tag{A.34}$$

$$I_6 = \left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m^2}\right)^2 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} \int_0^1 (1-x)\,dx \left(e^{-i\lambda M_1(x)} - e^{-i\lambda M_2(x)} + i\lambda(M_1(x)-M_2(x))e^{-i\lambda M_2(x)}\right)$$

$$= -\left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m^2}\right)^2 \int_0^1 (1-x)\,dx \left(\ln M_1(x) - \ln M_2(x)\right) - \left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m^2}\right) \int_0^1 dx\, \frac{(1-x)x}{M_2(x)} \tag{A.35}$$

$$J = -i\left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m^2}\right)^2 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2} \int_0^1 dx \left(3x-\frac{1}{2}+xp^2\frac{d}{dp^2}\right)\left(e^{-i\lambda M_1(x)} - e^{-i\lambda M_2(x)} + i\lambda(M_1(x)-M_2(x))e^{-i\lambda M_2(x)}\right)$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m^2}\right) + \left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m^2}\right)^2 \int_0^1 dx \left(3x-\frac{1}{2}+xp^2\frac{d}{dp^2}\right)\left(M_1(x)\ln M_1(x) - M_2(x)\ln M_2(x) + \left(\frac{\Delta^2-m^2}{\Delta^2}\right)x\ln M_2(x)\right) \qquad (A.36)$$

Auch die in (A.33) bis (A.36) verbliebenen x-Integrale haben wir im Anschluß an (A.6) bis (A.8) bereits behandelt, so daß wir das Ergebnis mit den folgenden Definitionen angeben können.

$$D(m_i^2,\sigma^2,p^2) := -p^4-(m_i^2-\sigma^2)^2+2p^2(m_i^2+\sigma^2) \quad ; \; m_i^2 = m^2, \Delta^2.$$

$$y(m_i^2,\sigma^2,p^2) := -D(m_i^2,\sigma^2,p^2)\int_0^1 \frac{dx}{M_i(x)} =$$

$$= \begin{cases} \sqrt{-D(m_i^2,\sigma^2,p^2)}\,\ln\dfrac{m_i^2+\sigma^2-p^2+\sqrt{-D(m_i^2,\sigma^2,p^2)}}{m_i^2+\sigma^2-p^2-\sqrt{-D(m_i^2,\sigma^2,p^2)}} & ; \; p^2<(m_i-\sigma)^2 \\ -2\sqrt{D(m_i^2,\sigma^2,p^2)}\,\operatorname{arctg}\dfrac{m_i^2-\sigma^2+p^2}{\sqrt{D(m_i^2,\sigma^2,p^2)}} + 2\sqrt{D(m_i^2,\sigma^2,p^2)}\,\operatorname{arctg}\dfrac{m_i^2-\sigma^2-p^2}{\sqrt{D(m_i^2,\sigma^2,p^2)}}; & (m_i-\sigma)^2 \le p^2 \le (m_i+\sigma)^2 \\ \sqrt{-D(m_i^2,\sigma^2,p^2)}\,\ln\dfrac{m_i^2+\sigma^2-p^2+\sqrt{-D(m_i^2,\sigma^2,p^2)}}{m_i^2+\sigma^2-p^2-\sqrt{-D(m_i^2,\sigma^2,p^2)}} + 2\pi i\sqrt{-D(m_i^2,\sigma^2,p^2)}\,; & p^2>(m_i+\sigma)^2 \end{cases} \qquad (A.37)$$

$$sign(i) := \begin{cases} +1 \text{ für } i=1 \\ -1 \text{ für } i=2 \end{cases}$$

$$I_4 = \left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m^2}\right)^2 \sum_{i=1}^{2} sign(i)\left\{\frac{1}{2p^2}y(m_i^2,\sigma^2,p^2) - \frac{(m_i^2-\sigma^2)}{2p^2}\ln\frac{m_i^2}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\ln\frac{m_i^2}{\Delta^2}\right\}$$

$$-\left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m^2}\right)\left\{\frac{(\Delta^2-\sigma^2-p^2)\Delta^2}{2p^2\cdot D(\Delta^2,\sigma^2,p^2)}y(\Delta^2,\sigma^2,p^2) + \frac{\Delta^2}{2p^2}\ln\frac{\Delta^2}{\sigma^2}\right\} \qquad (A.38)$$

$$I_5 = \left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m^2}\right)^2 \sum_{i=1}^{3} sign(i) \left\{ \frac{(p^2-m_i^2-\sigma^2)}{4p^2\Delta^2} Y(m_i^2,\sigma^2,p^2) + \frac{(m_i^4-\sigma^4)}{4p^2\Delta^2} \ln\frac{m_i^2}{\sigma^2} \right.$$
$$\left. -\frac{1}{2}\frac{m_i^2}{\Delta^2}\ln\frac{m_i^2}{\sigma^2} + \left(\frac{m_i^2}{\Delta^2}+\frac{\sigma^2}{2\Delta^2}-\frac{p^2}{4\Delta^2}\right)\ln\frac{m_i^2}{\Delta^2} \right\} \qquad (A.39)$$
$$+\left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m^2}\right)\left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{4p^2} Y(\Delta^2,\sigma^2,p^2) + \frac{1}{4}\frac{(\Delta^2-\sigma^2-p^2)(\Delta^2+\sigma^2-p^2)}{D(\Delta^2,\sigma^2,p^2)} Y(\Delta^2,\sigma^2,p^2) \right.$$
$$\left. +\frac{1}{2}\frac{\Delta^2}{p^2}\ln\frac{\Delta^2}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\ln\frac{\Delta^2}{\sigma^2} \right\}$$

$$I_6 = \left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m^2}\right)^2 \sum_{i=1}^{2} sign(i) \left\{ \frac{(m_i^2-\sigma^2+p^2)}{4p^4} Y(m_i^2,\sigma^2,p^2) - \frac{(m_i^2-\sigma^2)^2}{4p^4}\ln\frac{m_i^2}{\sigma^2} \right.$$
$$\left. +\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{p^2}\ln\frac{m_i^2}{\Delta^2} - \frac{1}{4}\ln\frac{m_i^2}{\Delta^2} + \frac{1}{2}\frac{m_i^2}{p^2} \right\} \qquad (A.40)$$
$$+\left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m^2}\right)\left\{ \frac{\Delta^2}{2p^4} Y(\Delta^2,\sigma^2,p^2) - \frac{(\Delta^2+\sigma^2-p^2)\Delta^2}{2p^2 D(\Delta^2,\sigma^2,p^2)} Y(\Delta^2,\sigma^2,p^2) \right.$$
$$\left. +\frac{\Delta^2}{p^2} - \frac{(\Delta^2-\sigma^2)\Delta^2}{2p^4}\ln\frac{\Delta^2}{\sigma^2} \right\}$$

$$I_7 = \left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m^2}\right)^2 \frac{\Delta^2}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{2} sign(i) \left\{ \frac{(m_i^2-\sigma^2-p^2)(m_i^2+\sigma^2-p^2)}{8p^4\Delta^2} Y(m_i^2,\sigma^2,p^2) \right.$$
$$+\frac{1}{4}\frac{\sigma^2}{\Delta^2}\ln\frac{m_i^2}{\sigma^2} - \frac{(m_i^2+\sigma^2-p^2)\left[(m_i^2-\sigma^2-p^2)^2-2p^2\sigma^2\right]}{8p^4\Delta^2}\ln\frac{m_i^2}{\sigma^2}$$
$$\left. -\frac{1}{4}\frac{(m_i^2-p^2)^3}{p^4\Delta^2}\ln\frac{m_i^2-p^2}{m_i^2} \right\} \qquad (A.41)$$
$$+\left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m^2}\right)\frac{\Delta^2}{\sigma^2}\left\{ \frac{\sigma^2}{4p^2} - \frac{3(\Delta^2-p^2)^2}{4p^4}\ln\frac{\Delta^2-p^2}{\Delta^2} + \frac{3(\Delta^2-\sigma^2-p^2)}{8p^4} Y(\Delta^2,\sigma^2,p^2) \right.$$
$$+\frac{\sigma^2}{2p^4} Y(\Delta^2,\sigma^2,p^2) + \frac{\sigma^2(p^2-\Delta^2-\sigma^2)}{2p^2 D(\Delta^2,\sigma^2,p^2)} Y(\Delta^2,\sigma^2,p^2)$$
$$\left. -\frac{\sigma^2(\Delta^2-\sigma^2-p^2)}{2p^4}\ln\frac{\Delta^2}{\sigma^2} + \frac{\sigma^2}{4p^2}\ln\frac{\Delta^2}{\sigma^2} - \frac{3(\Delta^2-\sigma^2-p^2)^2}{8p^4}\ln\frac{\Delta^2}{\sigma^2} \right\}$$

Die Integrale I_4 bis I_7 haben für $p^2 = (m_i + \sigma)^2$ mit $m_i = m, \Delta$ Schwellen, wie man aus der Definition in (A.37) für die Funktion $Y(m_i^2, \sigma^2, p^2)$ erkennt.

A.4 Näherungsentwicklungen für die Integrale aus A.3.

Für die Massenberechnung in § 3 verwenden wir $I_k(\sigma^2, p^2)$ nur für $p^2 = 0$.

$$I_4(\sigma^2;0) = \left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m^2}\right)^2 \sum_{i=1}^{2} sign(i)\left\{-\frac{1}{2}\ln\frac{m_i^2}{\Delta^2} - \frac{1}{2}\frac{(m_i^2+\sigma^2)}{(m_i^2-\sigma^2)}\ln\frac{m_i^2}{\sigma^2}\right\}$$
$$+\left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m^2}\right)\left\{\frac{\Delta^2\sigma^2}{(\Delta^2-\sigma^2)^2}\ln\frac{\Delta^2}{\sigma^2} - \frac{\Delta^2}{\Delta^2-\sigma^2}\right\} \qquad (A.42)$$

$$I_5(\sigma^2;0) = \left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m^2}\right)^2 \sum_{i=1}^{2} sign(i)\left\{-\frac{1}{4}\frac{m_i^2}{\Delta^2}\ln\frac{m_i^2}{\sigma^2} + \left(\frac{\sigma^2}{4\Delta^2}+\frac{m_i^2}{\Delta^2}\right)\ln\frac{m_i^2}{\Delta^2}\right.$$
$$\left. +\frac{1}{4}\frac{(m_i^2+\sigma^2)^2}{\Delta^2(m_i^2-\sigma^2)}\ln\frac{m_i^2}{\sigma^2} + \frac{(m_i^2+\sigma^2)}{2\Delta^2}\right\} \qquad (A.43)$$
$$+\left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m^2}\right)\left\{1+\frac{(\Delta^2+\sigma^2)}{2(\Delta^2-\sigma^2)} + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{(\Delta^2-\sigma^2)}\ln\frac{\Delta^2}{\sigma^2} - \frac{\sigma^2(\Delta^2+\sigma^2)}{2(\Delta^2-\sigma^2)^2}\ln\frac{\Delta^2}{\sigma^2}\right\}$$

$$I_6(\sigma^2;0) = \left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m^2}\right)^2 \sum_{i=1}^{2} sign(i)\left\{-\frac{1}{2}\frac{m_i^2\sigma^2}{(m_i^2-\sigma^2)}\ln\frac{m_i^2}{\sigma^2} + \frac{1}{4}\frac{(m_i^2+\sigma^2)}{(m_i^2-\sigma^2)}\right.$$
$$\left. -\frac{1}{4}\ln\frac{m_i^2}{\Delta^2} - \frac{1}{4}\frac{(m_i^2+\sigma^2)}{(m_i^2-\sigma^2)}\ln\frac{m_i^2}{\sigma^2}\right\} \qquad (A.44)$$
$$+\left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m^2}\right)\left\{-\frac{\Delta^2(\Delta^2+\sigma^2)}{2(\Delta^2-\sigma^2)^2} + \frac{\Delta^4\sigma^2}{(\Delta^2-\sigma^2)^3}\ln\frac{\Delta^2}{\sigma^2}\right\}$$

$$I_7(\sigma^2;0) = \left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m^2}\right)^2 \frac{\Delta^2}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{2} sign(i)\left\{-\frac{m_i^2}{8\Delta^2} + \frac{1}{8}\frac{(m_i^2+\sigma^2)^2}{(m_i^2-\sigma^2)\Delta^2} - \frac{\sigma^2 m_i^2(m_i^2+\sigma^2)}{4\Delta^2(m_i^2-\sigma^2)}\ln\frac{m_i^2}{\sigma^2}\right.$$
$$\left. +\frac{1}{2}\frac{m_i^2\sigma^2}{\Delta^2(m_i^2-\sigma^2)}\ln\frac{m_i^2}{\sigma^2}\right\} \qquad (A.45)$$
$$+\left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2-m^2}\right)\left\{\frac{3}{4}\frac{\Delta^2}{\Delta^2-\sigma^2} - \frac{1}{2}\frac{\Delta^2(\Delta^2+\sigma^2)}{(\Delta^2-\sigma^2)^2} + \frac{\sigma^2\Delta^4}{(\Delta^2-\sigma^2)^3}\ln\frac{\Delta^2}{\sigma^2} - \frac{3}{4}\frac{\sigma^2\Delta^2}{(\Delta^2-\sigma^2)^2}\ln\frac{\Delta^2}{\sigma^2}\right\}$$

Dafür erhält man mit $x = \frac{\sigma^2}{\Delta^2}$ in den drei Teilgebieten für x näherungsweise:

$$\bar{I}_4(x) \approx \begin{cases} -\ln x - 1 & \text{für } x < 10^{-3} \\ -\frac{1}{(1-x)^2}\ln x - \frac{1}{1-x} & \text{für } 10^{-3} \le x \le 10^{3} \\ \frac{1}{x} & \text{für } x > 10^{3} \end{cases} \qquad (A.46)$$

$$\bar{I}_5(x) \approx \begin{cases} 1 + x\ln x & \text{für } x < 10^{-3} \\ \frac{x}{(1-x)^2}\ln x + \frac{1}{1-x} & \text{für } 10^{-3} \le x \le 10^{3} \\ \frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} & \text{für } x > 10^{3} \end{cases} \qquad (A.47)$$

$$I_6(x) \approx \begin{cases} -\frac{1}{2}\ln x - 1 & \text{für } x < 10^{-3} \\ -\frac{1}{2}\frac{1}{(1-x)^2}\ln x - \frac{x}{(1-x)^3}\ln x - \frac{1}{(1-x)^2} & \text{für } 10^{-3} \leq x \leq 10^3 \\ \frac{1}{2x^2}\ln x - \frac{1}{x^2} & \text{für } x > 10^3 \end{cases} \quad \text{(A.48)}$$

$$I_7(x) \approx \begin{cases} \frac{1}{4}\ln x - \frac{1}{4} & \text{für } x < 10^{-3} \\ \frac{1}{4}\frac{1}{(1-x)^2}\ln x - \frac{x}{(1-x)^3}\ln x + \frac{1}{4(1-x)} - \frac{1}{2}\frac{(1+x)}{(1-x)^2} & \text{für } 10^{-3} \leq x \leq 10^3 \\ -\frac{3}{4x} & \text{für } x > 10^3 \end{cases} \quad \text{(A.49)}$$

Im Gebiet $\frac{4m^2}{\Delta^2} \leq x \leq 10^{-3}$ weichen die angegebenen Entwicklungen für x, die mit $\frac{m^2}{\Delta^2}$ vergleichbar sind, um maximal 0,5 % von den exakten Werten ab, wenn man für $\ln\frac{\Delta^2}{m^2} \approx 200$ ansetzt.

Literaturverzeichnis.

1 F.Bopp, Z.Phys. 200, 117 (1967)

2 F.Bopp, Z.Phys. 200, 133 (1967)

3 F.Bopp, Z.Phys. 200, 142 (1967)

4 F.Bopp, Sitz.-Ber. Bayer.Akad. Wiss., Math.-Naturw. Klasse, 13 (1967)

5 E.G.Weidemann, Z.Naturforschg. 24a, 499 (1969)

6 E.G.Weidemann u. F.Bopp, Z.Phys. 204, 311 (1967)

7 F.Wahl u. D.Stocker, unveröffentlicht

8 Y.Nambu u. G.Jona-Lasinio, Phys.Rev. 122, 345 (1961)

9 H.J.W.Müller, Z.Naturforschg. 25a, 1017 (1970)

10 D.Stocker, Dissertation 1971, Universität München

11 W.Heisenberg, Einführung in die einheitliche Feldtheorie der Elementarteilchen, S.Hirzel Verlag Stuttgart (1967), § 2.6, § 3.3

12 P.Roman, Introduction to Quantum Field Theory, John Wiley (1969), Kapitel IV und V

13 G.Källén, Helv.Phys.Acta 25, 417 (1952)
H.Lehmann, Nuovo Cimento 11, 342 (1954)

14 F.Bopp u. H.Maier-Bötzel, Sitz.-Ber. Bayer.Akad. Wiss., Math.-Naturw. Klasse, 103 (1970)

15 S.Weinberg, Phys.Rev. 118, 838 (1960)

16 l.c. 11
H.P.Dürr, W.Heisenberg, H.Mitter, S.Schlieder u. K.Yamazaki, Z.Naturforschg. 14a, 441 (1959)
H.P.Dürr, Z.Naturforschg. 16a, 327 (1961)
H.Rampacher, H.Stumpf u. F.Wagner, Fortschr.Phys. 13, 385 (1965), § 17 und § 18

17 E.C.G.Sudarshan, Phys.Rev. 123, 2183 (1961)
123, 2193 (1961)
H.Rampacher, H.Stumpf u. F.Wagner, Fortschr.Phys. 13, 385 (1965), § 17 S. 450
W.Heisenberg, Symposium on Basic Questions in Elementary Particle Physics, München Juni 1971 (wird veröffentlicht)

18 l.c. 12

18 J.D.Bjorken u. S.D.Drell, Relativistische Quantenfeldtheorie, B.I. Hochschultaschenbuch, Mannheim (1967), § 19.2 und § 19.3

19 Goldstone, Nuovo Cimento 19, 154 (1961)
J.Goldstone, A.Salam u. S.Weinberg, Phys.Rev. 127, 965 (1962)
C.R.Hagen, G.Guralnik, V.A.Mathur, Proceedings of the 1967 International Conference on Particles an Fields, Interscience Publishers, New York

20 W.Pauli u. F.Villars, Rev.Mod.Phys. 21, 434 (1949)

21 M.Löwer, Dissertation 1970, Universität München

L e b e n s l a u f

Am 15. Mai 1941 wurde ich als Sohn des Polsterers und Dekorateurs Karl Friedel und seiner Ehefrau Martha, geb. Hieber, in Aalen (Württ.) geboren. Nach dem Besuch der Volksschule in Wasseralfingen und später in Aalen, wurde ich im Herbst 1951 in das Schubart-Gymnasium Aalen aufgenommen, wo ich im Frühjahr 1960 die Reifeprüfung bestand. Anschließend arbeitete ich ein halbes Jahr im Zentrallabor der Firma Siemens & Halske in München. Mit dem Winter-Semester 1960 begann ich an der Universität München das Studium der Physik. Im Sommer-Semester 1963 legte ich dort das Vordiplom ab. Nach der Fertigstellung meiner Diplomarbeit am Lehrstuhl von Prof. Dr. F. Bopp, erwarb ich im Winter-Semester 1967 das Diplom für Physik. Im März 1968 heiratete ich. Seit dem Beginn meiner Doktorarbeit im Januar 1968 bin ich am Lehrstuhl Bopp als Verwalter einer wissenschaftlichen Assistentenstelle tätig.